

Analyse - Vrai-Faux des problèmes EP2 de 2022 à 2023

EP 2 2022 :

I. Séries entières.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera soigneusement les réponses.

- (a) Affirmation : « soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels positifs, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
- (b) Affirmation : « soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
- (c) Affirmation : « soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tous non nuls. On suppose que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \ell,$$

avec $\ell < 1$. Alors la série de terme général u_k converge absolument ».

- (d) Affirmation : « soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues définies sur un même intervalle I , telle que pour tout $x \in I$, la suite $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $U(x)$. La fonction U ainsi définie sur I est continue ».

EP 2 2023 :

I. Exercices préliminaires

Il s'agit de résultats classiques utiles par la suite. Bien entendu, ces résultats sont à établir, même s'ils apparaissent explicitement au programme du concours.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? On justifiera soigneusement les réponses.

- (a) Affirmation : « la fonction $x \mapsto e^x - 4$, définie sur \mathbb{R} , est solution de l'équation différentielle $y' = y + 4$. »
- (b) Affirmation : « l'unique solution du système de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

est la fonction $x \mapsto e^x - 4$, définie sur \mathbb{R} . »

- (c) Affirmation : « l'équation différentielle $y' = y + 4$ possède une unique solution définie sur \mathbb{R} . »
- (d) Affirmation : « l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y + 4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. »