Algèbre - Vrai-Faux des problèmes EP1 de 2022 à 2024

EP 1 2022 :

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Soit n un entier strictement positif.
Affirmation : "Il existe des matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $\mathrm{Tr}\,(MN) \neq \mathrm{Tr}\,(NM)$."

(b) Affirmation : "Deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ ont le même polynôme caractéristique si et seulement si elles ont la même trace et le même déterminant."

(c) Affirmation : "Les matrices carrées et symétriques à coefficients dans $\mathbf{C}$ sont diagonalisables."

(d) Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
Affirmation : "Si $\varphi(a)$ est inversible dans B, alors a est inversible dans A."

EP 1 2023 :

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Affirmation : « Pour tout nombre premier p et pour tout entier naturel n non nul, l'anneau $\left(\mathbf{Z}_{/p^n\mathbf{Z}}, +, \cdot\right)$ est un corps. »

(b) Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors la classe de 2 engendre le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\left(\mathbf{Z}_{/p^n\mathbf{Z}}, +, \cdot\right)$. »

(c) Affirmation : « Le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\left(\mathbf{Z}_{/9\mathbf{Z}}, +, \cdot\right)$est cyclique. »

(d) Si a un entier relatif, alors on note $\bar{a}$ la classe de a dans $\mathbf{Z}_{/5\mathbf{Z}}$.
Étant donnés quatre entiers relatifs a, b, c et d, on note M la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ définie par $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on note $\overline{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_{/5\mathbf{Z}})$ définie par $\overline{M} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$.
Affirmation : « Si $M \in GL_2(\mathbf{R})$, alors $\overline{M} \in GL_2(\mathbf{Z}_{/5\mathbf{Z}})$. »

(e) Soient K et L deux corps commutatifs.
Affirmation : « Un morphisme d'anneaux $\mu : K \to L$ est toujours injectif. »

EP 1 2024 :

Dans tout cet exercice, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les réponses devront être soigneusement justifiées.

(a) Tout endomorphisme de E est diagonalisable.

(b) Soient f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Il existe un sous-espace vectoriel F' de E stable par f tel que $E = F \oplus F'$.

(c) Soit f un endomorphisme de E diagonalisable. Alors f^2 est diagonalisable.

(d) Soit f un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable. Alors f est diagonalisable.

(e) Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$.