Notations

• Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$, on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$.

• Si deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes, on notera $u_n \sim_n v_n$. De même, si f et g sont deux applications réelles définies au voisinage d'un point x_0 et équivalentes en x_0, on notera $f(x) \sim_{x_0} g(x)$. Quand le voisinage sera un voisinage à droite en x_0, on précisera $f(x) \sim_{x_0^+} g(x)$.

• On rappelle que le *produit au sens de Cauchy* de deux séries (réelles ou complexes) $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est la série $\sum w_n$ où le terme général w_n est défini pour $n \geq 0$ par $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}$. On rappelle aussi que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit $\sum w_n$ est aussi absolument convergente et l'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Objectifs du problème

Ce sujet aborde une série de résultats et de propriétés relatifs à la formule de Stirling[1] ainsi qu'aux polynômes et nombres dits de Bernoulli[2]. Il se compose de quatre parties.

Dans la partie I, on établit la formule de Stirling qui donne un équivalent simple de la suite $(n!)_n$. Ce travail utilise les intégrales de Wallis[3], qui sont étudiées au début de la partie. La fin de la partie I est une application des intégrales de Wallis et de la formule de Stirling à l'étude du volume des boules dans $\mathbb{R}^n$.

La partie II s'intéresse aux polynômes et nombres de Bernoulli. On y étudie certaines de leurs propriétés et l'on donne deux applications de cette étude. La première, arithmétique, s'intéresse au calcul des sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$. La deuxième est consacrée au développement en série entière de la fonction $\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1}$.

Dans la partie III, on introduit la fonction ζ de Riemann[4] et l'on explicite ses valeurs prises sur les entiers positifs pairs au moyen des nombres de Bernoulli. Ce calcul permet, avec la formule de Stirling, d'expliciter un équivalent simple pour la suite des nombres de Bernoulli.

Dans la partie IV, on revient à la formule de Stirling et l'on décrit une méthode pour obtenir un raffinement asymptotique de la formule.

Les parties de ce sujet ne sont pas indépendantes, chacune d'elles pouvant utiliser des résultats établis dans celles qui la précèdent. Aussi pourra-t-on utiliser pour traiter certaines questions, les résultats établis dans les questions précédentes sans les démontrer. Il est toutefois vivement conseillé aux candidats d'aborder linéairement ce sujet.

---

[1] James, mathématicien anglais, Garden 1692 - Edimbourg 1770.

[2] Jakob (francisé en Jacques), mathématicien suisse, premier d'une longue lignée familiale de mathématiciens. Bâle 1654 - Bâle 1705.

[3] John, mathématicien anglais, Ashford 1616 - Oxford 1703.

[4] Georg Friedrich Bernhard, mathématicien allemand, Breselenz 1826 - Selasca 1866

I. Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

I.1. Intégrales de Wallis.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

I.1.a. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.
(Indication. On pourra, par exemple, utiliser un changement de variables.)

I.1.b. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.
(Indication. Pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.)

I.1.c. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour $n \geq 0$, on a

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$$

I.1.d. En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$\begin{cases} W_{2p} &= \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} &= \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

I.1.e. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(Indication. On pourra utiliser la question précédente en distinguant suivant la parité de l'entier n.)

I.1.f. Prouver que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

et en déduire que $W_n \sim_n W_{n+1}$.
(Indication. On pourra utiliser la question I.1.b.)

I.1.g. Montrer finalement que $W_n \sim_n \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_n W_n$.

I.2. Formule de Stirling.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geq 2$, par

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$$

I.2.a. Exprimer simplement v_n en fonction n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$ de la suite $(v_n)_n$.

I.2.b. En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente. Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim_n K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

I.2.c. En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que

$$n! \sim_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

(Formule de Stirling)

I.3. Une autre application des intégrales de Wallis.

[**Rappel sur les intégrales multiples et généralisation.** (Ce rappel n'est utile que pour les sous-questions I.3.a. et I.3.c. de cette question I.3.)

Les notions d'intégrales doubles et triples ainsi que la méthode de calcul par intégrations successives de ces dernières (présentes au programme), se généralisent à toute dimension finie de la manière suivante : étant donné un entier $n \geq 1$, une partie $A_n \subset \mathbb{R}^n$ sera dite continûment paramétrable si $n = 1$ et A_1 est un segment ou si $n \geq 2$ et s'il existe une partie $A_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ continûment paramétrable et deux fonctions continues $f, g : A_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in A_{n-1} \text{ et } f(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$$

Avec ces notations, pour une fonction continue $\varphi : A_n \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit l'intégrale multiple de φ sur A_n par la formule suivante :

$$\int \cdots \int_{A_n} \varphi(x_1, \cdots, x_n) d_{x_n} \cdots d_{x_1} = \int \cdots \int_{A_{n-1}} \left(\int_{f(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{g(x_1,\cdots,x_{n-1})} \varphi(x_1, \cdots, x_n) d_{x_n} \right) d_{x_{n-1}} \cdots d_{x_1}$$

On admettra, sans démonstration, qu'à l'instar des intégrales doubles et triples, le réel ainsi obtenu ne dépend que de la partie A_n et de la fonction φ. Le volume de la partie A_n sera alors, par définition, le réel $\int \cdots \int_{A_n} d_{x_n} \cdots d_{x_1}$.]

On se propose d'étudier ici le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ la boule $\mathcal{B}_n$ de centre O et de rayon R :

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\}$$

On note V_n son volume.

I.3.a. Montrer que, pour $n \geq 2$, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{cases}$$

En déduire par récurrence sur $n \geq 1$, que $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable.

I.3.b. Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geq 0$ un entier. Montrer, en se servant par exemple d'un changement de variable utilisant la fonction $t \mapsto \lambda \sin t$, que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} dx = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

I.3.c. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k = 1, \cdots, n-1$ on a

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i \right) \int \cdots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2 \right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \cdots dx_1$$

(Indication. On pourra, pour n fixé, faire une récurrence finie sur k.)

I.3.d. Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i \right) (2R)^n$$

et par suite, que pour $k \geq 1$

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

et que pour $k \geq 0$

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}$$

Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

I.3.e. En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_k$ et $(V_{2k+1})_k$.

I.3.f. En déduire que $\lim_n V_n = 0$.

I.3.g. Montrer que, soit la suite $(V_n)_n$ est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_n$ soit croissante jusqu'au rang n_0, puis décroissante.

(Indication. On pourra calculer simplement le rapport V_{n+1}/V_n grâce à la question I.3.d. et utiliser les questions I.1.b. et I.1.g.)

I.3.h. Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_n$ est décroissante.

I.3.i. Que vaut le rang n_0 de la question I.3.g. quand $R = 1$?

II. Polynômes et nombres de Bernoulli.

II.1. Définitions.

II.1.a. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx = 0$.

II.1.b. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_n$ vérifiant

- $B_0(X) = 1$
- $\forall n \geq 1,\ B_n' = nB_{n-1}$
- $\forall n \geq 1,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx = 0$

On appelle $(B_n(X))_n$ *la* suite des polynômes de Bernoulli. *Pour tout* $n \geq 0$*, on pose* $b_n = B_n(0)$*. La suite de réels* $(b_n)_n$ *est appelée* suite des nombres de Bernoulli.

II.1.c. Expliciter $B_n(X)$ et b_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

II.2. Premières propriétés.

II.2.a. Quel est le degré de $B_n(X)$ pour $n \geq 0$?

II.2.b. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

II.2.c. Prouver par récurrence que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} b_{n-k} x^k$$

où $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ désigne le coefficient binômial : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

II.2.d. En déduire, pour $n \geq 1$, une expression de b_n en fonction de $b_0, \cdots, b_{n-1}$. Calculer b_5 et b_6.

II.2.e. Montrer que la suite $(b_n)_n$ est une suite de rationnels et que, pour $n \geq 0$, les polynômes $B_n(X)$ sont à coefficients rationnels.

II.2.f. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geq 0$ on a $C_n(X) = B_n(X)$.

II.2.g. En déduire que

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \geq 1,\ b_{2n+1} = 0 \\ \bullet\ \forall n \geq 0,\ B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

II.3. Etude des variations de B_n sur $[0, 1]$.

II.3.a. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Etablir que, si P est non nul et de signe constant sur $[0, 1]$, alors on a $\int_0^1 P(x)dx \neq 0$.

II.3.b. Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$, que B_{2n} vérifie

$$\begin{cases} \bullet\quad (-1)^n B_{2n}(0) < 0 \\ \bullet\quad (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \\ \bullet\quad (-1)^n B_{2n}(\frac{1}{2}) > 0 \\ \bullet\quad \text{la fonction } (-1)^n B_{2n} \text{ est strictement croissante sur } [0, \frac{1}{2}] \text{ et strictement décroissante} \\ \quad\ \ \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

et que B_{2n+1} vérifie

$$\begin{cases} \bullet\quad (-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0 \\ \bullet\quad \text{il existe deux réels } \alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[\text{ et } \beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[\text{ tels que la fonction } (-1)^n B_{2n+1} \\ \quad\ \ \text{soit strictement décroissante sur } [0, \alpha_{2n+1}] \text{ puis strictement croissante sur } [\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}] \\ \quad\ \ \text{puis strictement décroissante sur } [\beta_{2n+1}, 1] \end{cases}$$

(Indication. Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces six propriétés.)

II.3.c. En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

II.3.d. Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n^*(X) = B_n(X) - b_n$. Pour $n \geq 1$, donner l'allure générale des courbes représentatives des fonctions B_{4n-2}^*, B_{4n-1}^*, B_{4n}^*, B_{4n+1}^* sur l'intervalle $[0, 1]$.

II.4. Une application arithmétique.

II.4.a. Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

II.4.b. Soient $p \geq 1$ et $N \geq 0$ deux entiers. On pose $S_p(N) = \sum_{k=0}^{N} k^p$, montrer en utilisant la question II.4.a. que

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}$$

II.4.c. Calculer explicitement, en fonction de l'entier naturel N, les sommes $S_p(N)$ pour $p = 1, 2, 3$.

II.5. Une application analytique.

II.5.a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{b_n}{n!} t^n$ est égal à 2π.

(Indication. On pourra, par exemple, déterminer les réels $t > 0$ pour lesquels la suite $(\frac{|b_n|}{n!} t^n)_n$ reste bornée. A cet effet, on pourra utiliser la formule de Stirling et admettre pour cette question que l'on a l'équivalent $b_{2p} \sim_p (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}$. Ce dernier résultat sera établi dans la question III.2.e. à venir.)

II.5.b. Calculer le produit au sens de Cauchy des séries entières

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n\right)$$

et en déduire que, pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n$$

II.5.c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

II.5.d. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n(x)}{n!} t^n$ est bien 2π.

(Indication. On pourra regarder dans $\mathbb{C}$ le comportement de la série entière au voisinage du cercle $|z| = 2\pi$.)

III. Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli.

III.1. Fonction ζ.

On appelle fonction ζ de Riemann (réelle) la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

III.1.a. Soit $s > 0$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} < \frac{1}{k^s}$$

En déduire que la nature (divergence ou convergence) de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ est la même que celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$.

III.1.b. Donner le domaine de définition de ζ et prouver qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.

III.1.c. Montrer que $\zeta(s) \sim_{1^+} \dfrac{1}{s-1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} \zeta(s)$.

III.1.d. Soit $a > 1$ un réel. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. En déduire que ζ est continue sur son domaine de définition et que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

III.1.e. Montrer que, pour tout $s > 0$, la série $\theta(s) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge. Prouver que, pour tout $s > 1$, on a

$$\theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$$

III.2. Calcul de $\zeta(2p)$.

Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2ik\pi x}dx$$

le k-ième coefficient de Fourier de la fonction f. On rappelle sans démonstration que, si f et g sont deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, alors on a

$$\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f)}c_k(g)$$

(où $z \mapsto \overline{z}$ désigne la conjugaison complexe).

III.2.a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient $c_k(B_n)$.
(Indication. Pour $k \neq 0$ et $n \geq 2$, on cherchera une relation entre $c_k(B_n)$ et $c_k(B_{n-1})$.)

III.2.b. Soient $n, m \geq 1$ deux entiers. Montrer que

$$\int_0^1 B_n(x)B_m(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} [c_{-k}(B_n)c_k(B_m) + c_k(B_n)c_{-k}(B_m)]$$

et en déduire la valeur de cette intégrale au moyen de valeurs de la fonction ζ.
(Indication. On distinguera les cas $n + m$ pair et $n + m$ impair.)

III.2.c. Pour $p \geq 1$, calculer $\displaystyle\int_0^1 B_1(x)B_{2p-1}(x)dx$ en intégrant par parties. En déduire que

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\frac{b_{2p}}{2}\frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}$$

III.2.d. Donner les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4},\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$$

et des sommes

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2},\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4},\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^6}$$

III.2.e. En utilisant les questions III.1.d. et III.2.c. ainsi que la formule de Stirling, montrer que

$$b_{2p}\sim_p (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}$$

III.3. Application numérique.

III.3.a. Soient $s>1$ et $N\geq 1$. Montrer que

$$\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{n^s}\leq\frac{N^{1-s}}{s-1}$$

III.3.b. Etant donné un réel $\epsilon>0$, expliciter un entier N_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^s}$ soit une approximation à ϵ près de $\zeta(s)$.

III.3.c. Déduire de ce qui précéde, une approximation rationnelle A de π^6 à 10^{-2} près.

III.3.d. Majorer l'erreur commise en prenant $\sqrt[6]{A}$ comme approximation de π. Combien de décimales de π cette approximation permet-elle de donner? Les donner.

IV. Formule de Stirling généralisée.

On considère la suite $(\Omega_n)_n$ définie, pour $n\geq 0$, par $\Omega_n=\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$.

On sait, d'après la partie I, que l'on a $\Omega_n=1+o(1)$. On se propose ici de décrire une méthode pour obtenir un développement limité en $1/n$ à un ordre donné de la suite $(\Omega_n)_n$, autrement dit on veut raffiner la formule de Stirling.

IV.1. On se fixe un entier $N\geq 2$.

IV.1.a. Montrer que $\displaystyle\ln\Omega_N=\ln\Omega_1+\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

IV.1.b. Montrer que la fonction $t\mapsto\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+t)$ est développable en série entière en 0. Préciser son développement ainsi que le rayon de convergence de ce développement.

IV.1.c. En déduire que

$$\ln\Omega_N=\ln\Omega_1+\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\left(\zeta(k)-\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^k}\right)$$

IV.1.d. Montrer que la série $\displaystyle\sum(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k)$ est convergente.

(Indication. On pourra utiliser le critère des séries alternées.)

IV.1.e. En déduire que

$$\ln \Omega_N = \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

où $R_k(N) = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^k}$.

IV.2.

IV.2.a. Prouver que, pour tout $k \geq 2$ et tout $N \geq 2$, on a

$$\frac{1}{k-1} . \frac{1}{N^{k-1}} \leq R_k(N) \leq \frac{1}{k-1} . \frac{1}{N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}$$

IV.2.b. En déduire que, pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} R_k(N) = o\left(\frac{1}{N^{p-2}}\right)$$

IV.3.

IV.3.a. Montrer que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k-1)}{2k(k+1)} \zeta(k) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi$$

et que, pour tout $N \geq 2$, on a

$$\ln \Omega_N = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)$$

IV.3.b. Déduire de ce qui précède que, si les suites $(R_2(N))_N$, $\cdots$, $(R_{p+1}(N))_N$ possèdent des développements limités en $1/N$ à l'ordre p, alors la suite $(\ln \Omega_N)_N$ en possède aussi un et que celui-ci est égal à celui de la suite $\left(\sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N)\right)_N$.

IV.3.c. Montrer que la suite $(\ln \Omega_N)_N$ possède un développement limité en $1/N$ à l'ordre 1. En déduire celui de la suite $(\Omega_N)_N$ à cet ordre.

IV.4.

IV.4.a. Montrer que, pour $N \geq 1$, on a $R_2(N) - \frac{1}{N} = \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

IV.4.b. En comparant cette dernière série à l'intégrale généralisée $\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$, donner le développement limité de la suite $(R_2(N))_N$ en $1/N$ à l'ordre 2. En déduire le développement limité de la suite $(\ln \Omega_N)_N$ puis de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à l'ordre de 2.

IV.4.c. En généralisant ce qui vient d'être fait, décrire brièvement les étapes à suivre pour trouver un développement limité de la suite $(\Omega_N)_N$, en $1/N$ à un ordre donné.

FIN