Construction de $\mathbb{R}$ par les quasi-morphismes de $\mathbb{Z}$

Salim Rostam
Journées 4a de l'ENS Rennes

23 janvier 2015

Sommaire

1. Anneaux des classes de quasi-morphismes
   - Quasi-morphismes
   - Deux lois de composition

2. Structure de corps commutatif ordonné vérifiant la propriété de la borne inférieure
   - Structure de corps commutatif
   - Ordre garantissant la propriété de la borne inférieure

1. Anneaux des classes de quasi-morphismes
   - Quasi-morphismes
   - Deux lois de composition

2. Structure de corps commutatif ordonné vérifiant la propriété de la borne inférieure
   - Structure de corps commutatif
   - Ordre garantissant la propriété de la borne inférieure

Quasi-morphismes

Définition

Pour $k \in \mathbb{N}$, une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est un élément de QH_k si :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, |f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq k$$

♣

Quasi-morphismes

Définition

Pour $k \in \mathbb{N}$, une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est un élément de QH_k si :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, |f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq k$$

♣

Exemples

- $\mathrm{QH}_0 = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$
- Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ on a $n \mapsto \mathrm{E}(\alpha n) \in \mathrm{QH}_2$

Définition (Quasi-morphismes)

L'ensemble des quasi-morphismes de $\mathbb{Z}$ est $\mathrm{QH} := \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{QH}_k$

♣

Mes premières propriétés

Propriétés

Pour $f \in \mathrm{QH}_k$ on a :

- $\forall m, n \in \mathbb{Z}, |f(mn) - mf(n)| \leq (|m| + 1)k$
- $\exists a \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, |f(n)| \leq a|n| + k$
- $|nf(m) - mf(n)| \leq (|m| + |n| + 2)k$

♣

Mes premières propriétés

Propriétés

Pour $f \in \mathrm{QH}_k$ on a :

- $\forall m, n \in \mathbb{Z}, |f(mn) - mf(n)| \leq (|m| + 1)k$
- $\exists a \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, |f(n)| \leq a|n| + k$
- $|nf(m) - mf(n)| \leq (|m| + |n| + 2)k$

♣

Remarque

La suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Deux lois de composition

Proposition

L'ensemble QH des quasi-morphismes est un groupe pour la loi d'addition des fonctions, et est stable pour la loi de composition.

Remarque

La loi $\circ$ n'est pas distributive à droite : $f \circ (g + g') - f \circ g - f \circ g'$ n'est pas nécessairement nul. En particulier, $(\mathrm{QH}, +, \circ)$ n'est *pas* un anneau.

Deux lois de composition

On peut sauver les meubles : $|f \circ (g + g') - f \circ g - f \circ g'| \leq k_f$

Deux lois de composition

On peut sauver les meubles : $|f \circ (g + g') - f \circ g - f \circ g'| \leq k_f$

Définition

On définit l'ensemble $\mathcal{R}$ comme étant le quotient de QH par les quasi-morphismes bornés.

♣

Théorème

Les lois $+$ et $\circ$ passent au quotient, faisant de $(\mathcal{R}, +, \circ)$ un anneau.

1. Anneaux des classes de quasi-morphismes
   - Quasi-morphismes
   - Deux lois de composition

2. Structure de corps commutatif ordonné vérifiant la propriété de la borne inférieure
   - Structure de corps commutatif
   - Ordre garantissant la propriété de la borne inférieure

1. Anneaux des classes de quasi-morphismes
   - Quasi-morphismes
   - Deux lois de composition

2. Structure de corps commutatif ordonné vérifiant la propriété de la borne inférieure
   - Structure de corps commutatif
   - Ordre garantissant la propriété de la borne inférieure

Structure d'anneau commutatif

Proposition

$(\mathcal{R}, +, \circ)$ est un anneau commutatif.

Démonstration

Si $f, g \in \mathrm{QH}$ alors comme $|nf(m) - mf(n)| \leq (|m| + |n| + 2)k_f$ on obtient avec $m = g(n)$:

$$|nf(g(n)) - g(n)f(n)| \leq (|g(n)| + |n| + 2)k_f \leq k_1|n| + k_1'$$

Structure d'anneau commutatif

Proposition

$(\mathcal{R}, +, \circ)$ est un anneau commutatif.

Démonstration

Si $f, g \in \mathrm{QH}$ alors comme $|nf(m) - mf(n)| \leq (|m| + |n| + 2)k_f$ on obtient avec $m = g(n)$:

$$|nf(g(n)) - g(n)f(n)| \leq (|g(n)| + |n| + 2)k_f \leq k_1|n| + k_1'$$

et en faisant la même chose en inversant f et g on obtient :

$$|nf(g(n)) - ng(f(n))| \leq k|n| + k'$$

d'où $f \circ g - g \circ f$ borné.

Structure de corps

Théorème

L'anneau $\mathcal{R}$ est un corps.

Idée de démonstration

Pour $f \in \mathrm{QH}$ non borné mais minoré, on pose :

$$g(n) := \min\{m \in \mathbb{N} : f(m) \geq n\}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $g(n) := -g(-n)$ pour $n \leq 0$. On vérifie que $f \circ g - \mathrm{id}$ est borné.

Ce qui va suivre

- On pourrait montrer que $\mathcal{R}$ est isomorphe au corps usuel des réels $\mathbb{R}$ grâce à lim : $[f] \mapsto \lim \frac{f(n)}{n}$.

Remarque

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\lim \frac{\mathrm{E}(\alpha n)}{n} = \alpha$.

Ce qui va suivre

- On pourrait montrer que $\mathcal{R}$ est isomorphe au corps usuel des réels $\mathbb{R}$ grâce à $\lim : [f] \mapsto \lim \frac{f(n)}{n}$.

Remarque

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\lim \frac{\mathrm{E}(\alpha n)}{n} = \alpha$.

- On va montrer que $\mathcal{R}$ sera *a posteriori* isomorphe à $\mathbb{R}$, en munissant le corps $\mathcal{R}$ d'un ordre total tel que la propriété de la borne inférieure soit vérifiée.

Ordre

Définition

Pour $x, y \in \mathcal{R}$, on définit la relation $\preceq$ par :

$$x \preceq y \text{ si } \exists f, g \in \mathrm{QH}, [f] = x, [g] = y, \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq g(n).$$

♣

Ordre

Définition

Pour $x, y \in \mathcal{R}$, on définit la relation $\preceq$ par :

$$x \preceq y \text{ si } \exists f, g \in \mathrm{QH}, [f] = x, [g] = y, \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq g(n).$$

$\clubsuit$

Proposition

La relation $\preceq$ est compatible avec la structure de corps de $\mathcal{R}$.

Ordre

Définition

Pour $x, y \in \mathcal{R}$, on définit la relation $\preceq$ par :

$$x \preceq y \text{ si } \exists f, g \in \mathrm{QH}, [f] = x, [g] = y, \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq g(n).$$

♣

Proposition

La relation $\preceq$ est compatible avec la structure de corps de $\mathcal{R}$.

Lemme

Pour $f \in \mathrm{QH}_k$ on a $[\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq -k]$ ou $[\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq k]$.

♣

Corollaire

Le corps $\mathcal{R}$ est totalement ordonné.

Ordre

Propriété

$f \in \mathrm{QH}_k$ est majoré <u>ssi</u> k est un majorant de $f|_{\mathbb{N}}$ <u>ssi</u> $[f] \preceq 0$.

♣

Ordre

Propriété

$f \in \mathrm{QH}_k$ est majoré ssi k est un majorant de $f|_{\mathbb{N}}$ ssi $[f] \preceq 0$.

♣

Remarque

En notant $\bar{k} := k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, le couple (A, B) défini par $A := \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \bar{p} \leq \lambda \circ \bar{q}\right\}$ et $B := \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \bar{p} \geq \lambda \circ \bar{q}\right\}$ pour $\lambda \in \mathrm{QH}$ est une coupure de Dedekind.

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Démonstration

Soit $g \in \mathrm{QH}_k$ et considérons $f(n) := \mathrm{E}\left(\frac{g(kn)}{k}\right)$.

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Démonstration

Soit $g \in \mathrm{QH}_k$ et considérons $f(n) := \mathrm{E}\left(\frac{g(kn)}{k}\right)$.

- $|f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq \Big| f(m+n) - \qquad \Big|$
  $+ \Big| \qquad - f(m) \Big| + \Big| \qquad - f(n) \Big| +$

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Démonstration

Soit $g \in \mathrm{QH}_k$ et considérons $f(n) := \mathrm{E}\left(\frac{g(kn)}{k}\right)$.

- $|f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq \left|f(m+n) - \frac{g(k(m+n))}{k}\right| + \left|\frac{g(km)}{k} - f(m)\right| + \left|\frac{g(kn)}{k} - f(n)\right| + \frac{1}{k}|g(k(m+n)) - g(km) - g(kn)|$

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Démonstration

Soit $g \in \mathrm{QH}_k$ et considérons $f(n) := \mathrm{E}\left(\frac{g(kn)}{k}\right)$.

- $|f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq \left|f(m+n) - \frac{g(k(m+n))}{k}\right| + \left|\frac{g(km)}{k} - f(m)\right| + \left|\frac{g(kn)}{k} - f(n)\right| + \frac{1}{k}|g(k(m+n)) - g(km) - g(kn)| \leq 1 + 1 + 1 + \frac{1}{k}k$ donc $f \in \mathrm{QH}_4$.

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Démonstration

Soit $g \in \mathrm{QH}_k$ et considérons $f(n) := \mathrm{E}\left(\frac{g(kn)}{k}\right)$.

- $|f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq \left|f(m+n) - \frac{g(k(m+n))}{k}\right| + \left|\frac{g(km)}{k} - f(m)\right| + \left|\frac{g(kn)}{k} - f(n)\right| + \frac{1}{k}|g(k(m+n)) - g(km) - g(kn)| \leq 1 + 1 + 1 + \frac{1}{k}k$ donc $f \in \mathrm{QH}_4$.
- $|g(n) - f(n)| \leq |g(n) - \frac{g(kn)}{k}| + |\frac{g(kn)}{k} - f(n)|$

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Démonstration

Soit $g \in \mathrm{QH}_k$ et considérons $f(n) := \mathrm{E}\left(\frac{g(kn)}{k}\right)$.

- $|f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq \left|f(m+n) - \frac{g(k(m+n))}{k}\right| + \left|\frac{g(km)}{k} - f(m)\right| + \left|\frac{g(kn)}{k} - f(n)\right| + \frac{1}{k}|g(k(m+n)) - g(km) - g(kn)| \leq 1 + 1 + 1 + \frac{1}{k}k$ donc $f \in \mathrm{QH}_4$.
- $|g(n) - f(n)| \leq |g(n) - \frac{g(kn)}{k}| + |\frac{g(kn)}{k} - f(n)|$ $\leq \frac{1}{k}|kg(n) - g(kn)| + 1 \leq \frac{1}{k}(|k| + 1)k + 1$ donc $g \sim f$.

Lemme de normalisation

Lemme

$$\forall x \in \mathcal{R}, \exists f \in \mathrm{QH}_4, x = [f] \qquad \clubsuit$$

Démonstration

Soit $g \in \mathrm{QH}_k$ et considérons $f(n) := \mathrm{E}\left(\frac{g(kn)}{k}\right)$.

- $|f(m+n) - f(m) - f(n)| \leq \left|f(m+n) - \frac{g(k(m+n))}{k}\right| + \left|\frac{g(km)}{k} - f(m)\right| + \left|\frac{g(kn)}{k} - f(n)\right| + \frac{1}{k}|g(k(m+n)) - g(km) - g(kn)| \leq 1 + 1 + 1 + \frac{1}{k}k$ donc $f \in \mathrm{QH}_4$.
- $|g(n) - f(n)| \leq |g(n) - \frac{g(kn)}{k}| + |\frac{g(kn)}{k} - f(n)|$
  $\leq \frac{1}{k}|kg(n) - g(kn)| + 1 \leq \frac{1}{k}(|k| + 1)k + 1$ donc $g \sim f$.

Remarque

Si $x \succeq 0$ alors il existe $f \in \mathrm{QH}_4$ avec $[f] = x$ et $f|_{\mathbb{N}} \geq 0$. $\clubsuit$

Propriété de la borne inférieure

Théorème

Toute partie non vide minorée de $\mathcal{R}$ possède une borne inférieure.

Propriété de la borne inférieure

Théorème

Toute partie non vide minorée de $\mathcal{R}$ possède une borne inférieure.

Soit $X \subseteq \mathcal{R}$ une partie non vide qui vérifie $X \succeq 0$.

Choix d'un bon candidat

Pour $x \in X$, on considère $f_x \in \mathrm{QH}_4$ qui relève x et qui vérifie $f_x \geq 0$. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) := \min\{f_x(n) : x \in X\} = f_{x_n}(n) \qquad \clubsuit$$

et $g(-n) := -g(n)$.

Propriété de la borne inférieure

Théorème

Toute partie non vide minorée de $\mathcal{R}$ possède une borne inférieure.

Soit $X \subseteq \mathcal{R}$ une partie non vide qui vérifie $X \succeq 0$.

Choix d'un bon candidat

Pour $x \in X$, on considère $f_x \in \mathrm{QH}_4$ qui relève x et qui vérifie $f_x \geq 0$. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) := \min\{f_x(n) : x \in X\} = f_{x_n}(n) \qquad \clubsuit$$

et $g(-n) := -g(n)$. On a $g(n) \leq f_x(n)$ $\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $[g]$ est un minorant de X.

Propriété de la borne inférieure (2)

Le candidat est QH

- On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \geq f_{x_{m+n}}(m+n) - f_{x_{m+n}}(m) - f_{x_{m+n}}(n) \geq -4$ car $f_{x_{m+n}} \in \mathrm{QH}_4$.

Propriété de la borne inférieure (2)

Le candidat est QH

- On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \geq f_{x_{m+n}}(m+n) - f_{x_{m+n}}(m)$ $- f_{x_{m+n}}(n) \geq -4$ car $f_{x_{m+n}} \in \mathrm{QH}_4$.
- Si $x_m \preceq x_n$ alors $f_{x_m} - f_{x_n} \in \mathrm{QH}_8$ vérifie $f_{x_m} - f_{x_n} \leq 8$.

Propriété de la borne inférieure (2)

Le candidat est QH

- On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \geq f_{x_{m+n}}(m+n) - f_{x_{m+n}}(m)$ $- f_{x_{m+n}}(n) \geq -4$ car $f_{x_{m+n}} \in \mathrm{QH}_4$.
- Si $x_m \preceq x_n$ alors $f_{x_m} - f_{x_n} \in \mathrm{QH}_8$ vérifie $f_{x_m} - f_{x_n} \leq 8$. On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \leq f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_n}(n)$

Propriété de la borne inférieure (2)

Le candidat est QH

- On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \geq f_{x_{m+n}}(m+n) - f_{x_{m+n}}(m)$ $- f_{x_{m+n}}(n) \geq -4$ car $f_{x_{m+n}} \in \mathrm{QH}_4$.
- Si $x_m \preceq x_n$ alors $f_{x_m} - f_{x_n} \in \mathrm{QH}_8$ vérifie $f_{x_m} - f_{x_n} \leq 8$. On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \leq f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_n}(n)$ $\leq [f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_m}(n)] + [f_{x_m}(n) - f_{x_n}(n)] \leq 4 + 8$.

Propriété de la borne inférieure (2)

Le candidat est QH

- On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \geq f_{x_{m+n}}(m+n) - f_{x_{m+n}}(m)$ $- f_{x_{m+n}}(n) \geq -4$ car $f_{x_{m+n}} \in \mathrm{QH}_4$.
- Si $x_m \preceq x_n$ alors $f_{x_m} - f_{x_n} \in \mathrm{QH}_8$ vérifie $f_{x_m} - f_{x_n} \leq 8$. On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \leq f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_n}(n)$ $\leq [f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_m}(n)] + [f_{x_m}(n) - f_{x_n}(n)] \leq 4 + 8$.

Le candidat est le bon

Soit $m \in \mathcal{R}$ un minorant de X. Ainsi, $\forall x \in X, \exists h_x, f'_x \in \mathrm{QH}_4$, $[h_x] = m, [f'_x] = x$ et $h_x \leq f'_x$.

Propriété de la borne inférieure (2)

Le candidat est QH

- On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \geq f_{x_{m+n}}(m+n) - f_{x_{m+n}}(m)$ $- f_{x_{m+n}}(n) \geq -4$ car $f_{x_{m+n}} \in \mathrm{QH}_4$.
- Si $x_m \preceq x_n$ alors $f_{x_m} - f_{x_n} \in \mathrm{QH}_8$ vérifie $f_{x_m} - f_{x_n} \leq 8$. On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \leq f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_n}(n)$ $\leq [f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_m}(n)] + [f_{x_m}(n) - f_{x_n}(n)] \leq 4 + 8$.

Le candidat est le bon

Soit $m \in \mathcal{R}$ un minorant de X. Ainsi, $\forall x \in X, \exists h_x, f'_x \in \mathrm{QH}_4$, $[h_x] = m, [f'_x] = x$ et $h_x \leq f'_x$. Pour un $x_0 \in X$, notons $h := h_{x_0}$; on a $[h - h_x] = 0$ donc $h - h_x \in \mathrm{QH}_8$ est borné, par 8, donc on a :

$$\forall x \in X, h \leq f'_x + 8$$

Propriété de la borne inférieure (2)

Le candidat est QH

- On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \geq f_{x_{m+n}}(m+n) - f_{x_{m+n}}(m)$ $- f_{x_{m+n}}(n) \geq -4$ car $f_{x_{m+n}} \in \mathrm{QH}_4$.
- Si $x_m \preceq x_n$ alors $f_{x_m} - f_{x_n} \in \mathrm{QH}_8$ vérifie $f_{x_m} - f_{x_n} \leq 8$. On a $g(m+n) - g(m) - g(n) \leq f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_n}(n)$ $\leq [f_{x_m}(m+n) - f_{x_m}(m) - f_{x_m}(n)] + [f_{x_m}(n) - f_{x_n}(n)] \leq 4 + 8$.

Le candidat est le bon

Soit $m \in \mathcal{R}$ un minorant de X. Ainsi, $\forall x \in X, \exists h_x, f'_x \in \mathrm{QH}_4$, $[h_x] = m, [f'_x] = x$ et $h_x \leq f'_x$. Pour un $x_0 \in X$, notons $h := h_{x_0}$; on a $[h - h_x] = 0$ donc $h - h_x \in \mathrm{QH}_8$ est borné, par 8, donc on a :

$$\forall x \in X, h \leq f'_x + 8$$

De même, on a $[f'_x] = x = [f_x]$ et donc :

$$\forall x \in X, h \leq f_x + 16$$

d'où $h \leq g + 16$ d'où $m \preceq [g]$.

Et alors ?

- Soit $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $\rho(n) := \min\{k \in \mathbb{N} : 2n^2 \leq k\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho(n) := -\rho(-n)$ sinon. On vérifie que $\rho \in \mathrm{QH}_8$, de plus $2n \leq \rho(\rho(n)) \leq 2n + 2$ on a $[\rho \circ \rho] = [2\mathrm{id}] = 2$: on a construit une racine carrée de 2.

Et alors ?

- Soit $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $\rho(n) := \min\{k \in \mathbb{N} : 2n^2 \leq k\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho(n) := -\rho(-n)$ sinon. On vérifie que $\rho \in \mathrm{QH}_8$, de plus $2n \leq \rho(\rho(n)) \leq 2n + 2$ on a $[\rho \circ \rho] = [2\mathrm{id}] = 2$: on a construit une racine carrée de 2.
- Soient $P := X^5 + X - 3$ et $\alpha(n) := \min\left\{k \in \mathbb{N} : P\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0\right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha(n) := -\alpha(-n)$ sinon. On montre que $\alpha \in \mathrm{QH}_3$ et que $[\alpha]$ est une racine du polynôme P.

Et alors ?

- Soit $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $\rho(n) := \min\{k \in \mathbb{N} : 2n^2 \leq k\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho(n) := -\rho(-n)$ sinon. On vérifie que $\rho \in \mathrm{QH}_8$, de plus $2n \leq \rho(\rho(n)) \leq 2n+2$ on a $[\rho \circ \rho] = [2\mathrm{id}] = 2$: on a construit une racine carrée de 2.
- Soient $P := X^5 + X - 3$ et $\alpha(n) := \min\left\{k \in \mathbb{N} : P\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0\right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha(n) := -\alpha(-n)$ sinon. On montre que $\alpha \in \mathrm{QH}_3$ et que $[\alpha]$ est une racine du polynôme P.
- Soit $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $\beta(n) := \#\{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^2 + q^2 \leq n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta(n) := -\beta(-n)$ sinon. On a $|\beta(n) - n\pi| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}$ et donc $\bar{\beta} : n > 0 \mapsto \mathrm{E}\left(\frac{\beta(n^2)}{n}\right)$ est QH, et $[\bar{\beta}]$ représente le réel π.
- Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application impaire telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\left(\frac{\epsilon(n)}{n}\right)^{\frac{n}{\epsilon(n)}} = \max\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}} : k > 0\right\}$. La fonction ϵ est QH et $[\epsilon]$ représente le réel e.

Références

- STREET Ross, *An efficient construction on the real numbers*. Gazette of the Australian Math. Soc. 12 (1985), p.57–58.
- DOUGLAS James et al., *The efficient real numbers* (2004).
- CARUSO Xavier, *Une incarnation peu connue du corps des réels* (2008).
- A'CAMPO Norbert, *A natural construction for the real numbers* (2003).