

# Résidus bégayants

Salim ROSTAM

Université Paris-Saclay

Mardi 17 octobre 2017

Rencontres Doctorales Lebesgue

Centre de mathématiques Henri Lebesgue, Rennes

1 Un théorème de combinatoire

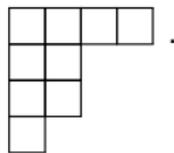
2 Outils pour la preuve

## Définition

Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*.

Ainsi, la partition  $(4, 2, 2, 1)$  est représentée par

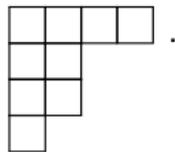


## Définition

Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*.

Ainsi, la partition  $(4, 2, 2, 1)$  est représentée par



## Définition

Une *bipartition* est un couple de partitions.

## Exemple

Le couple  $((5, 1), (2))$  est une bipartition, formée des partitions  $(5, 1)$  et  $(2)$ .

# Multiensemble des résidus

Soit  $\eta$  un entier naturel non nul et soit  $e := 2\eta$ .

## Définition

Le *multiensemble des résidus* de la bipartition  $(\lambda, \mu)$  est la partie de :

$$\begin{array}{cccc} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{2} & \dots \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \dots \\ \boxed{-2} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \boxed{\eta} & \boxed{\eta+1} & \boxed{\eta+2} & \dots \\ \boxed{\eta-1} & \boxed{\eta} & \boxed{\eta+1} & \dots \\ \boxed{\eta-2} & \boxed{\eta-1} & \boxed{\eta} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \pmod{e},$$

correspondant au diagramme de Young de  $(\lambda, \mu)$ .

## Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition  $((5, 1), (2))$  est

donné pour  $e = 4$  par  $\boxed{0} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{0} \quad \boxed{2} \boxed{3} .$   
 $\boxed{3}$

# Multiplicités des résidus et décalage

Soit  $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$ . Si  $(\lambda, \mu)$  est une bipartition, on note  $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$  le  $e$ -uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

## Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition  $((4, 2), (1))$  pour  $e = 6$  est  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 & & \\ \hline \end{array} \boxed{3}$ , donc  $\alpha((4, 2), (1)) = (2, 1, 1, 2, 0, 1)$ .

# Multiplicités des résidus et décalage

Soit  $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$ . Si  $(\lambda, \mu)$  est une bipartition, on note  $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$  le  $e$ -uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

## Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition  $((4, 2), (1))$  pour  $e = 6$  est  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 & & \\ \hline \end{array} \boxed{3}$ , donc  $\alpha((4, 2), (1)) = (2, 1, 1, 2, 0, 1)$ .

## Définition (Décalage)

Pour  $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^e$ , on définit  $\sigma \cdot \alpha \in \mathbb{N}^e$  par  $(\sigma \cdot \alpha)_i := \alpha_{\eta+i}$ .

On a  $\sigma \cdot \alpha = (\alpha_\eta, \alpha_{\eta+1}, \dots, \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\eta-1})$ .

## Proposition

*On a  $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$ . En particulier, si  $\alpha := \alpha(\lambda, \lambda)$  alors  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ .*

## Théorème (R.)

*Soit  $(\lambda, \mu)$  une bipartition et soit  $\alpha := \alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ . Si  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$  alors il existe une partition  $\nu$  telle que  $\alpha = \alpha(\nu, \nu)$ .*

## Proposition

On a  $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$ . En particulier, si  $\alpha := \alpha(\lambda, \lambda)$  alors  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ .

## Théorème (R.)

Soit  $(\lambda, \mu)$  une bipartition et soit  $\alpha := \alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ . Si  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$  alors il existe une partition  $\nu$  telle que  $\alpha = \alpha(\nu, \nu)$ .

## Exemple

On prend  $e = 6$ . Les multiensembles :

0	3	4	5			0	1	2	3	3	4	5	0
5	2	3				5				2			
	1	2											
	0												

coïncident (et  $\alpha = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ ).

# Démonstration par l'exemple

On a  $\alpha(\square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ .

0	1	2
5	0	
4	5	
3		

3	4	5
2	3	
1	2	
0		

$$\alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$

# Démonstration par l'exemple

On a  $\alpha(\square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ .

0	1	2
5	0	
4	5	
3		

3	4	5
2	3	
1	2	
0		

↓

0	1	2
5	0	
4	5	
	5	

3	4	5
2	3	
1	2	
	2	

$$\alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$

↓

$$\alpha = (2, 2, 3, 2, 2, 3)$$

# Démonstration par l'exemple

On a  $\alpha(\square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ .

0	1	2
5	0	
4	5	
3		

3	4	5
2	3	
1	2	
0		

$$\alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$



0	1	2
5	0	
4	5	
	5	

3	4	5
2	3	
1	2	
	2	

$$\alpha = (2, 2, 3, 2, 2, 3)$$



0	1	2
5	0	
4		
4		

3	4	5
2	3	
	3	
	1	

$$\alpha = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

# Démonstration par l'exemple

On a  $\alpha(\square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ .

0	1	2
5	0	
4	5	
3		

3	4	5
2	3	
1	2	
0		

$$\alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$



0	1	2
5	0	
4	5	
	5	

3	4	5
2	3	
1	2	
	2	

$$\alpha = (2, 2, 3, 2, 2, 3)$$



0	1	2
5	0	
4	5	
	4	

3	4	5
2	3	
1	2	
	1	

$$\alpha = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$$



0	1	2
5	0	

3	4	5
2	3	

$$\alpha = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$$

# Échec de démonstration par l'exemple

On a  $\alpha(\square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ .

0	1	2
5	0	
4	5	
3		

3	4	5
2	3	
1	2	
0		

$$\alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$

# Échec de démonstration par l'exemple

On a  $\alpha(\square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \end{array}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ .

0	1	2
5	0	
4	5	
3		

3	4	5
2	3	
1	2	
0		

$$\alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$



0	1	2
5	0	
4	5	

3	4	5
2	3	
1	2	



$$\alpha = (2, 2, 3, 2, 2, 3)$$

# Échec de démonstration par l'exemple

On a  $\alpha(\square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$ .

0	1	2
5	0	
4	5	
3		

3	4	5
2	3	
1	2	
0		

$$\alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$



0	1	2
5	0	
4	5	

3	4	5
2	3	
1	2	

$$\alpha = (2, 2, 3, 2, 2, 3)$$



0	1
5	0
4	5

3	4
2	3
1	2

$$\alpha = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

① Un théorème de combinatoire

② Outils pour la preuve

## Proposition

*Il existe un ensemble de partitions  $\mathcal{C}_e$  et une application bijective :*

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_e \longrightarrow \mathbb{Z}_0^e = \{x \in \mathbb{Z} : x_0 + \dots + x_{e-1} = 0\} \\ \lambda \longmapsto x \end{array} \right. ,$$

*vérifiant  $\frac{1}{2} \|x\|^2 = \alpha_0$  et  $x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, e-1\}$ .*

## Proposition

Il existe un ensemble de partitions  $\mathcal{C}_e$  et une application bijective :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_e \longrightarrow \mathbb{Z}_0^e = \{x \in \mathbb{Z} : x_0 + \dots + x_{e-1} = 0\} \\ \lambda \longmapsto x \end{array} \right. ,$$

vérifiant  $\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0$  et  $x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, e-1\}$ .

## Corollaire

Si  $x = \phi(\lambda)$  et  $y = \phi(\mu)$  alors  $\alpha_0(\lambda, \mu) = q(x, y)$ , où :

$$q : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q}_0^e \times \mathbb{Q}_0^e \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - y_0 - \dots - y_{\eta-1} \end{array} \right. .$$

## Proposition

Il existe un ensemble de partitions  $\mathcal{C}_e$  et une application bijective :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{C}_e & \longrightarrow & \mathbb{Z}_0^e = \{x \in \mathbb{Z} : x_0 + \dots + x_{e-1} = 0\} \\ \lambda & \longmapsto & x \end{cases},$$

vérifiant  $\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0$  et  $x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, e-1\}$ .

## Corollaire

Si  $x = \phi(\lambda)$  et  $y = \phi(\mu)$  alors  $\alpha_0(\lambda, \mu) = q(x, y)$ , où :

$$q : \begin{cases} \mathbb{Q}_0^e \times \mathbb{Q}_0^e & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - y_0 - \dots - y_{e-1} \end{cases}.$$

## Remarque

Si  $\alpha(\lambda, \mu) = \alpha(\mu, \lambda)$  alors  $q(x, y) = q(y, x)$ .

## Utilisation de la convexité

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}_e$  une bipartition, posons  $x := \phi(\lambda)$  et  $y := \phi(\mu)$ . On suppose que  $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$  vérifie  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$  et on veut montrer qu'il existe une partition  $\nu$  telle que  $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$ .

# Utilisation de la convexité

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}_e$  une bipartition, posons  $x := \phi(\lambda)$  et  $y := \phi(\mu)$ . On suppose que  $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$  vérifie  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$  et on veut montrer qu'il existe une partition  $\nu$  telle que  $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$ .

## Lemme

*Il suffit de trouver une partition  $\nu \in \mathcal{C}_e$  telle que :*

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu, \nu) \leq \alpha_0, \\ \alpha_i(\nu, \nu) - \alpha_{i+1}(\nu, \nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, \end{cases} \quad \text{pour tout } i.$$

# Utilisation de la convexité

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}_e$  une bipartition, posons  $x := \phi(\lambda)$  et  $y := \phi(\mu)$ . On suppose que  $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$  vérifie  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$  et on veut montrer qu'il existe une partition  $\nu$  telle que  $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$ .

## Lemme

*Il suffit de trouver une partition  $\nu \in \mathcal{C}_e$  telle que :*

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu, \nu) \leq \alpha_0, \\ \alpha_i(\nu, \nu) - \alpha_{i+1}(\nu, \nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, \quad \text{pour tout } i. \end{cases}$$

*Autrement dit, il suffit de trouver  $z \in \mathbb{Z}_0^e$  tel que :*

$$\begin{cases} q(z, z) \leq q(x, y), \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, \quad \text{pour tout } i. \end{cases} \quad (E)$$

# Utilisation de la convexité

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}_e$  une bipartition, posons  $x := \phi(\lambda)$  et  $y := \phi(\mu)$ . On suppose que  $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$  vérifie  $\sigma \cdot \alpha = \alpha$  et on veut montrer qu'il existe une partition  $\nu$  telle que  $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$ .

## Lemme

*Il suffit de trouver une partition  $\nu \in \mathcal{C}_e$  telle que :*

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu, \nu) \leq \alpha_0, \\ \alpha_i(\nu, \nu) - \alpha_{i+1}(\nu, \nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, \quad \text{pour tout } i. \end{cases}$$

*Autrement dit, il suffit de trouver  $z \in \mathbb{Z}_0^e$  tel que :*

$$\begin{cases} q(z, z) \leq q(x, y), \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, \quad \text{pour tout } i. \end{cases} \quad (E)$$

Par convexité et symétrie de  $q$ , l'élément  $z := \frac{x+y}{2}$  vérifie (E) mais  $z \notin \mathbb{Z}_0^e$  (on a  $z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_0^e$ ).

## Forte convexité et approximation

La fonction  $q$  est convexe mais c'est aussi le cas de  $q - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ .

Ainsi :

$$q(z, z) \leq q(x, y) - \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$

## Forte convexité et approximation

La fonction  $q$  est convexe mais c'est aussi le cas de  $q - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ .

Ainsi :

$$q(z, z) \leq q(x, y) - \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$

### Théorème

On peut trouver un élément  $\tilde{z} \in \mathbb{Z}_0^e$  vérifiant :

$$q(\tilde{z}, \tilde{z}) \leq q(z, z) + \frac{1}{4}\|x - y\|^2,$$

ainsi que pour tout  $i$  :

$$\begin{aligned}z_i + z_{i+\eta} &= \tilde{z}_i + \tilde{z}_{i+\eta}, \\|z_i - \tilde{z}_i| &< 1.\end{aligned}$$

On conclut que  $\tilde{z}$  vérifie (E), en particulier  $q(\tilde{z}, \tilde{z}) \leq q(x, y)$ .

## Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation  $\tilde{z}$  repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left( V^{[1]} \mid V^{[2]} \right),$$

qui vérifie  $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$  et  $|V^{[j]}| \in \mathbb{N}$ .

## Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation  $\tilde{z}$  repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left( V^{[1]} \mid V^{[2]} \right),$$

qui vérifie  $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$  et  $|V^{[j]}| \in \mathbb{N}$ . On veut écrire  $V$  sous la forme

$$V = \frac{1}{2}(E_1 + E_2), \text{ où les matrices } E_i = \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{pmatrix} = \left( E_i^{[1]} \mid E_i^{[2]} \right)$$

vérifient  $|v^{(i)}| = |e_1^{(i)}| = |e_2^{(i)}|$  et  $|V^{[j]}| = |E_1^{[j]}| = |E_2^{[j]}|$ .

## Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation  $\tilde{z}$  repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left( V^{[1]} \mid V^{[2]} \right),$$

qui vérifie  $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$  et  $|V^{[i]}| \in \mathbb{N}$ . On veut écrire  $V$  sous la forme

$$V = \frac{1}{2}(E_1 + E_2), \text{ où les matrices } E_i = \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{pmatrix} = \left( E_i^{[1]} \mid E_i^{[2]} \right)$$

vérifient  $|v^{(i)}| = |e_1^{(i)}| = |e_2^{(i)}|$  et  $|V^{[i]}| = |E_1^{[i]}| = |E_2^{[i]}|$ . On prend :

$$E_1 := \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

$$E_2 := \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{array} \right).$$

## Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation  $\tilde{z}$  repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left( V^{[1]} \mid V^{[2]} \right),$$

qui vérifie  $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$  et  $|V^{[i]}| \in \mathbb{N}$ . On veut écrire  $V$  sous la forme

$$V = \frac{1}{2}(E_1 + E_2), \text{ où les matrices } E_i = \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{pmatrix} = \left( E_i^{[1]} \mid E_i^{[2]} \right)$$

vérifient  $|v^{(i)}| = |e_1^{(i)}| = |e_2^{(i)}|$  et  $|V^{[i]}| = |E_1^{[i]}| = |E_2^{[i]}|$ . On prend :

$$E_1 := \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$E_2 := \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Merci de votre attention !

## Définition

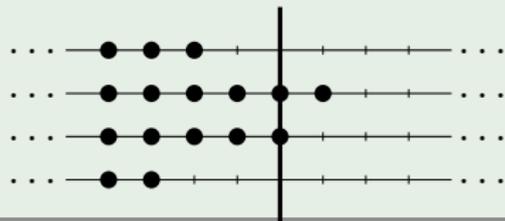
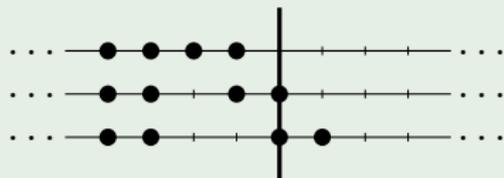
Le  $\beta$ -nombre associé à une partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$  est la suite  $(\beta(\lambda)_i)_{i \geq 1}$  définie par  $\beta(\lambda)_i := \lambda_i - i$ . En disposant les éléments de ce  $\beta$ -nombre sur un abaque à  $e$  fils, on obtient le  $e$ -abaque de  $\lambda$ .

## Définition

Le  $\beta$ -nombre associé à une partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$  est la suite  $(\beta(\lambda)_i)_{i \geq 1}$  définie par  $\beta(\lambda)_i := \lambda_i - i$ . En disposant les éléments de ce  $\beta$ -nombre sur un abaque à  $e$  fils, on obtient le  $e$ -abaque de  $\lambda$ .

## Exemple

Le  $\beta$ -nombre associé à la partition  $(6, 4, 4, 2, 2)$  est  $(5, 2, 1, -2, -3, -6, -7, \dots)$ . Des abaques sont :



## Définition

Un *crochet* pour une partition  $\lambda$  est une partie de  $\mathcal{Y}(\lambda)$  de la forme :

$$\{(i', j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \quad (i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

Un *ruban* est la projection d'un *e-crochet* sur la frontière de  $\mathcal{Y}(\lambda)$ .

## Définition

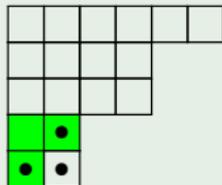
Un *crochet* pour une partition  $\lambda$  est une partie de  $\mathcal{Y}(\lambda)$  de la forme :

$$\{(i', j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \quad (i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

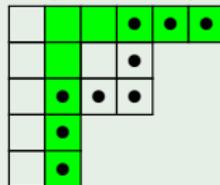
Un *ruban* est la projection d'un  $e$ -crochet sur la frontière de  $\mathcal{Y}(\lambda)$ .

## Exemple

Des  $e$ -crochets et leur  $e$ -rubans pour la partition  $(6, 4^2, 2^2)$  sont



(pour  $e = 3$ ) et



(pour  $e = 9$ ).

# Crochets, rubans

## Définition

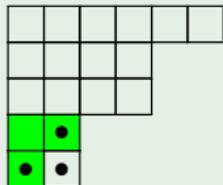
Un *crochet* pour une partition  $\lambda$  est une partie de  $\mathcal{Y}(\lambda)$  de la forme :

$$\{(i', j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \quad (i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

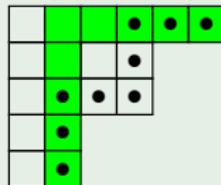
Un *ruban* est la projection d'un  $e$ -crochet sur la frontière de  $\mathcal{Y}(\lambda)$ .

## Exemple

Des  $e$ -crochets et leur  $e$ -rubans pour la partition  $(6, 4^2, 2^2)$  sont



(pour  $e = 3$ ) et



(pour  $e = 9$ ).

## Remarque

Si  $r$  est un ruban alors  $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus r = \mathcal{Y}(\mu)$  où  $\mu$  est une partition.

## Définition

Soit  $e \geq 2$ . Une partition est un  $e$ -cœur si elle n'a pas de  $e$ -crochet (ou, de façon équivalente, de  $e$ -ruban). L'ensemble  $\mathcal{C}_e$  est l'ensemble des  $e$ -cœurs.

## Définition

Soit  $e \geq 2$ . Une partition est un  $e$ -cœur si elle n'a pas de  $e$ -crochet (ou, de façon équivalente, de  $e$ -ruban). L'ensemble  $\mathcal{C}_e$  est l'ensemble des  $e$ -cœurs.

## Théorème

*Une partition est un  $e$ -cœur ssi son  $e$ -abaque n'a pas de trou.*

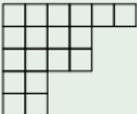
## Définition

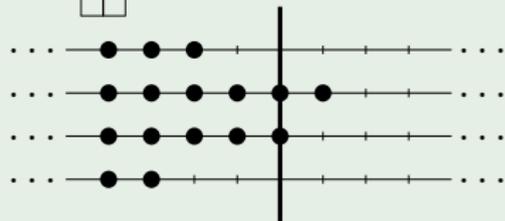
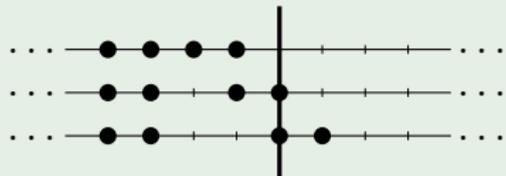
Soit  $e \geq 2$ . Une partition est un  $e$ -cœur si elle n'a pas de  $e$ -crochet (ou, de façon équivalente, de  $e$ -ruban). L'ensemble  $\mathcal{C}_e$  est l'ensemble des  $e$ -cœurs.

## Théorème

*Une partition est un  $e$ -cœur ssi son  $e$ -abaque n'a pas de trou.*

## Exemple

Les abaques associés à la partition  $\lambda :=$   sont :

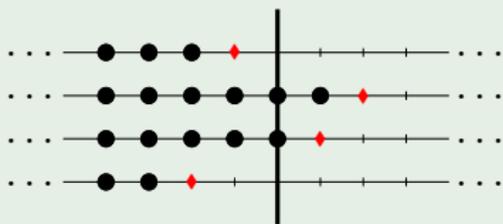


Ainsi  $\lambda$  est un 4-cœur (mais n'est pas un 3-cœur).

Au  $e$ -abaque d'un  $e$ -cœur  $\lambda$ , on considère les abscisses  $x = (x_0, \dots, x_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$  des premiers trous.

## Exemple

On représente les premiers trous du 4-abaque associé au 4-cœur  $(6, 4^2, 2^2)$  par des  $\blacklozenge$  :

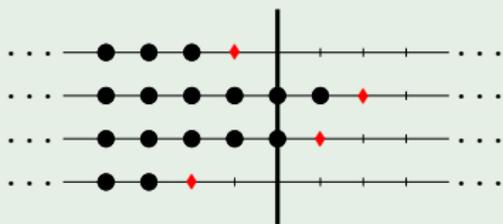


ainsi  $x = (-1, 2, 1, -2)$ .

Au  $e$ -abaque d'un  $e$ -cœur  $\lambda$ , on considère les abscisses  $x = (x_0, \dots, x_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$  des premiers trous.

## Exemple

On représente les premiers trous du 4-abaque associé au 4-cœur  $(6, 4^2, 2^2)$  par des  $\blacklozenge$  :



ainsi  $x = (-1, 2, 1, -2)$ .

L'application  $\phi : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathbb{Z}_0^e$  est donnée par  $\phi(\lambda) := x$ .