Cellularité de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Salim Rostam

Laboratoire de mathématiques de Versailles (LMV)
Université de Versailles Saint-Quentin (UVSQ)

Conférence des doctorants de l'ANR ACORT
27 et 28 avril 2017

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{st}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{st}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{ts}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{st}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{st}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{ts}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{tu}}(a)$ tels que :

$$\forall \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda), c^\lambda_{\mathfrak{st}} a = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{tu}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{su}} + \sum_{\substack{\mu \rhd \lambda \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)}} c^\mu_{\mathfrak{vw}}.$$

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a)$ tels que :

$$\forall \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda), c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} + \sum_{\substack{\mu \rhd \lambda \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)}} c^\mu_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}.$$

On a alors $\dim A = \sum_{\lambda \in L} |\mathcal{T}(\lambda)|^2$.

Ma première algèbre cellulaire

L'algèbre $\mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{n\}$ un singleton ;
- $\mathcal{T}(n) := \{1, \ldots, n\}$;
- $c^n_{ij} := E_{ij}$ la matrice élémentaire avec un 1 en position (i, j) et des zéros partout ailleurs.

Cela résulte de la relation classique $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ et du calcul suivant :

$$(E_{ij}E_{kl})^* = \delta_{jk}E^*_{il} = \delta_{kj}E_{li} = E_{lk}E_{ji} = E^*_{kl}E^*_{ij}.$$

Ma première algèbre cellulaire

L'algèbre $\mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{n\}$ un singleton ;
- $\mathcal{T}(n) := \{1, \ldots, n\}$;
- $c^n_{ij} := E_{ij}$ la matrice élémentaire avec un 1 en position (i, j) et des zéros partout ailleurs.

Cela résulte de la relation classique $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ et du calcul suivant :

$$(E_{ij}E_{kl})^* = \delta_{jk}E^*_{il} = \delta_{kj}E_{li} = E_{lk}E_{ji} = E^*_{kl}E^*_{ij}.$$

Proposition

Toute algèbre semi-simple est cellulaire.

Algèbres d'Ariki–Koike

Soient $n, r, e \in \mathbb{N}^*$, et soit $q \in F^\times$.

Définition (Broué–Malle 93, Ariki–Koike 94)

L'*algèbre d'Ariki–Koike* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r,1,n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$.

Algèbres d'Ariki–Koike

Soient $n, r, e \in \mathbb{N}^*$, et soit $q \in F^\times$.

Définition (Broué–Malle 93, Ariki–Koike 94)

L'*algèbre d'Ariki–Koike* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, 1, n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$.

- Si $r = 1$, on retrouve l'algèbre de Hecke de type A.
- Si $r = 2$, on retrouve l'algèbre de Hecke de type B.

Algèbres d'Ariki–Koike

Soient $n, r, e \in \mathbb{N}^*$, et soit $q \in F^\times$.

Définition (Broué–Malle 93, Ariki–Koike 94)

L'*algèbre d'Ariki–Koike* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, 1, n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$.

- Si $r = 1$, on retrouve l'algèbre de Hecke de type A.
- Si $r = 2$, on retrouve l'algèbre de Hecke de type B.

Notation

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est engendrée par des éléments $S, T_1, \dots, T_{n-1}$.

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des tableaux standards de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array} \right) \in \mathrm{Std}(4{:}2{:}1, 2).$$

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des tableaux standards de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \;,\; \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array} \right) \in \mathrm{Std}(4{:}2{:}1, 2).$$

Théorème (Murphy 95, Dipper-James-Mathas 98)

On peut trouver une base cellulaire de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$*, les éléments de la base étant de la forme* $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} := T^*_{d(\mathfrak{s})} m_{\boldsymbol{\lambda}} T_{d(\mathfrak{t})}$ *pour* $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Définition (Hu–Mathas)

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. Si l'algèbre A est graduée et que l'on peut étendre la fonction de degré à $\sqcup_{\lambda \in L} \mathcal{T}(\lambda)$ de telle façon que :

$$\deg c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t},$$

on dit que A est *cellulaire graduée*.

Algèbres cellulaires graduées

Définition (Hu–Mathas)

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. Si l'algèbre A est graduée et que l'on peut étendre la fonction de degré à $\sqcup_{\lambda \in L} \mathcal{T}(\lambda)$ de telle façon que :

$$\deg c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t},$$

on dit que A est *cellulaire graduée*.

Soit $e \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ l'ordre de q et soit Γ_e le carquois cyclique à e sommets.

Théorème (Rouquier 08, Brundan–Kleshchev 09)

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est isomorphe à un quotient cyclotomique de l'algèbre de Hecke carquois $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$, dont elle hérite de la $\mathbb{Z}$-graduation.

Algèbres cellulaires graduées

Définition (Hu–Mathas)

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. Si l'algèbre A est graduée et que l'on peut étendre la fonction de degré à $\sqcup_{\lambda \in L} \mathcal{T}(\lambda)$ de telle façon que :

$$\deg c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t},$$

on dit que A est *cellulaire graduée*.

Soit $e \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ l'ordre de q et soit Γ_e le carquois cyclique à e sommets.

Théorème (Rouquier 08, Brundan–Kleshchev 09)

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est isomorphe à un quotient cyclotomique de l'algèbre de Hecke carquois $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$, dont elle hérite de la $\mathbb{Z}$-graduation.

On note $y_1, \dots, y_n$, $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ et $e(\boldsymbol{i})$ pour $\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$ les générateurs gradués.

Soit $\mathfrak{t}$ un tableau standard avec n cases. On note $\mathcal{A}(\mathfrak{t})$ (respectivement $\mathcal{R}(\mathfrak{t})$) l'ensemble des nœuds ajoutables (resp. supprimables) de $\mathfrak{t}$ de même résidu que la case contenant n.

Cellularité homogène des algèbres d'Ariki–Koike

Soit $\mathfrak{t}$ un tableau standard avec n cases. On note $\mathcal{A}(\mathfrak{t})$ (respectivement $\mathcal{R}(\mathfrak{t})$) l'ensemble des nœuds ajoutables (resp. supprimables) de $\mathfrak{t}$ de même résidu que la case contenant n.

Définition (Brundan-Kleshchev-Wang)

Le *degré* de $\mathfrak{t}$ est $\deg \mathfrak{t} := \sum_{k=1}^{n} \left(|\mathcal{A}(\mathfrak{t}_{\leq k})| - |\mathcal{R}(\mathfrak{t}_{\leq k})|\right)$.

Cellularité homogène des algèbres d'Ariki–Koike

Soit $\mathfrak{t}$ un tableau standard avec n cases. On note $\mathcal{A}(\mathfrak{t})$ (respectivement $\mathcal{R}(\mathfrak{t})$) l'ensemble des nœuds ajoutables (resp. supprimables) de $\mathfrak{t}$ de même résidu que la case contenant n.

Définition (Brundan-Kleshchev-Wang)

Le *degré* de $\mathfrak{t}$ est $\deg \mathfrak{t} := \sum_{k=1}^{n}(|\mathcal{A}(\mathfrak{t}_{\leq k})| - |\mathcal{R}(\mathfrak{t}_{\leq k})|)$.

Théorème (Hu–Mathas 10)

L'algèbre d'Ariki–Koike $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est cellulaire graduée.

La base cellulaire graduée est donnée par des éléments $\psi_{\mathfrak{st}} := \psi^*_{d(\mathfrak{s})} y_{\boldsymbol{\lambda}} e_{\boldsymbol{\lambda}} \psi_{d(\mathfrak{t})}$.

Cellularité homogène des algèbres d'Ariki–Koike

Soit $\mathfrak{t}$ un tableau standard avec n cases. On note $\mathcal{A}(\mathfrak{t})$ (respectivement $\mathcal{R}(\mathfrak{t})$) l'ensemble des nœuds ajoutables (resp. supprimables) de $\mathfrak{t}$ de même résidu que la case contenant n.

Définition (Brundan-Kleshchev-Wang)

Le *degré* de $\mathfrak{t}$ est $\deg \mathfrak{t} := \sum_{k=1}^{n}(|\mathcal{A}(\mathfrak{t}_{\leq k})| - |\mathcal{R}(\mathfrak{t}_{\leq k})|)$.

Théorème (Hu–Mathas 10)

L'algèbre d'Ariki–Koike $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *est cellulaire graduée.*

La base cellulaire graduée est donnée par des éléments $\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} := \psi^*_{d(\mathfrak{s})} y_\lambda e_\lambda \psi_{d(\mathfrak{t})}$.

Remarques

- On obtient même une base cellulaire pour les blocs.
- Quand l'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple, cette base devient une base de matrices élémentaires.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Proposition

- *L'application* $\mu : \mathrm{H}_{r,n}(q) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ *donnée par* $\mu := \frac{1}{p}(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ *est une application linéaire surjective.*
- *On a* $\dim \mathrm{H}_{r,p,n}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{r,n}(q)}{p}$.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Proposition

- *L'application* $\mu : \mathrm{H}_{r,n}(q) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ *donnée par* $\mu := \frac{1}{p}(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ *est une application linéaire surjective.*
- *On a* $\dim \mathrm{H}_{r,p,n}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{r,n}(q)}{p}$.

Que peut-on dire de la cellularité de l'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$?

Action de σ sur les blocs de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Définition

On appelle un e-uplet d'entiers de somme n une *e-composition de n*.

On peut indexer les blocs de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ par des e-compositions de n : si α est une telle composition, on notera $\mathrm{H}_{\alpha}(q)$ le bloc correspondant. Dans la suite, on définit l'entier $\eta := \frac{e}{p}$.

Action de σ sur les blocs de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Définition

On appelle un e-uplet d'entiers de somme n une *e-composition de n*.

On peut indexer les blocs de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ par des e-compositions de n : si α est une telle composition, on notera $\mathrm{H}_\alpha(q)$ le bloc correspondant. Dans la suite, on définit l'entier $\eta := \frac{e}{p}$.

Définition

Si $\alpha = (\alpha_i)_{i=0..e-1}$ est une e-composition de n, on définit $\sigma \cdot \alpha$ la e-composition de n donnée par $(\sigma \cdot \alpha)_i := \alpha_{i+\eta}$ où les indices sont vu modulo e.

Proposition

Soit $\mathrm{H}_\alpha(q)$ un bloc de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$. Alors σ induit un isomorphisme :

$$\mathrm{H}_\alpha(q) \xrightarrow[\sim]{\sigma} \mathrm{H}_{\sigma\cdot\alpha}(q).$$

Cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

Soit α une e-composition de n. On considère l'algèbre suivante :

$$\mathrm{H}_{[\alpha]}(q) \coloneqq \mathrm{H}_{\alpha}(q) \oplus \mathrm{H}_{\sigma\cdot\alpha}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}_{\sigma^{p-1}\cdot\alpha}(q).$$

Cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

Soit α une e-composition de n. On considère l'algèbre suivante :

$$\mathrm{H}_{[\alpha]}(q) \coloneqq \mathrm{H}_{\alpha}(q) \oplus \mathrm{H}_{\sigma\cdot\alpha}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}_{\sigma^{p-1}\cdot\alpha}(q).$$

Théorème

On suppose que $|[\alpha]| = p$. *L'application* μ *induit un isomorphisme* $\mathrm{H}_{\alpha}(q) \xrightarrow[\sim]{\mu} \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$, *munissant cette dernière algèbre d'une structure cellulaire graduée.*

Démonstration

On transporte via σ la structure cellulaire de $\mathrm{H}_{\alpha}(q)$ à tous les $\mathrm{H}_{\sigma^k\cdot\alpha}(q)$. $\square$

Cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

Soit α une e-composition de n. On considère l'algèbre suivante :

$$\mathrm{H}_{[\alpha]}(q) := \mathrm{H}_{\alpha}(q) \oplus \mathrm{H}_{\sigma\cdot\alpha}(q) \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}_{\sigma^{p-1}\cdot\alpha}(q).$$

Théorème

On suppose que $|[\alpha]| = p$. L'application μ induit un isomorphisme $\mathrm{H}_{\alpha}(q) \xrightarrow[\sim]{\mu} \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$, munissant cette dernière algèbre d'une structure cellulaire graduée.

Démonstration

On transporte via σ la structure cellulaire de $\mathrm{H}_{\alpha}(q)$ à tous les $\mathrm{H}_{\sigma^k\cdot\alpha}(q)$. $\square$

Corollaire

On suppose que p et n sont premiers entre eux. Alors l'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ est cellulaire.

Base cellulaire candidate

Définition

- Si $\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$, on peut définir une r-partition ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}$, un tableau ${}^{\sigma}\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda})$ et on note $\mathfrak{t} \sim {}^{\sigma}\mathfrak{t}$.
- On choisit un représentant par classe d'équivalence pour $\sim$ et on note $\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble de ces représentants qui sont dans $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Exemple

Pour $\boldsymbol{\lambda} = (\mu, \nu)$ (cas $r = p = 2$) alors ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} = (\nu, \mu)$.

Base cellulaire candidate

Définition

- Si $\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$, on peut définir une r-partition ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}$, un tableau ${}^{\sigma}\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda})$ et on note $\mathfrak{t} \sim {}^{\sigma}\mathfrak{t}$.
- On choisit un représentant par classe d'équivalence pour $\sim$ et on note $\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble de ces représentants qui sont dans $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Exemple

Pour $\boldsymbol{\lambda} = (\mu, \nu)$ (cas $r = p = 2$) alors ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} = (\nu, \mu)$.

Proposition

- *On a* $|\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \frac{|[\boldsymbol{\lambda}]|}{p} |\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})|$.
- *La famille* $\{\mu(\psi_{\mathfrak{st}}) : \boldsymbol{\lambda} \models_r [\alpha], \mathfrak{s} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}), \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})\}$ *est une base de l'espace vectoriel* $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$.

Non-cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

On suppose ici que l'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple.

Lemme

$$\sigma(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = \psi_{\sigma_{\mathfrak{s}},\sigma_{\mathfrak{t}}}.$$

Non-cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

On suppose ici que l'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple.

Lemme

$$\sigma(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = \psi_{\sigma_{\mathfrak{s}},\sigma_{\mathfrak{t}}}.$$

Théorème

Si $|[\alpha]| < p$*, la base des* $\mu(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})$ *précédente ne peut pas être une base cellulaire de* $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$*.*

Non-cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

On suppose ici que l'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple.

Lemme

$$\sigma(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = \psi_{\sigma_{\mathfrak{s}},\sigma_{\mathfrak{t}}}.$$

Théorème

Si $|[\alpha]| < p$, la base des $\mu(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})$ précédente ne peut pas être une base cellulaire de $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$.

Démonstration.

On utilise la relation $\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}\psi_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} = \delta_{tu}\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{v}}$ et le lemme pour en déduire la loi de multiplication des $\mu(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})$. □

Une condition supplémentaire sur la cellularité

On a d'une part $\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \sum_{\ell \in L} |\mathcal{T}(\ell)|^2$, et d'autre part :

$$\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{[\alpha]}(q)}{p} = \frac{1}{p} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \models [\alpha]} |\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})|^2$$

Une condition supplémentaire sur la cellularité

On a d'une part $\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \sum_{\ell \in L} |\mathcal{T}(\ell)|^2$, et d'autre part :

$$\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{[\alpha]}(q)}{p} = \frac{1}{p} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \models [\alpha]} |\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})|^2$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{1}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|^2 = \sum_{[\boldsymbol{\lambda}]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|^2.$$

Une condition supplémentaire sur la cellularité

On a d'une part $\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \sum_{\ell \in L} |\mathcal{T}(\ell)|^2$, et d'autre part :

$$\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{[\alpha]}(q)}{p} = \frac{1}{p} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \models [\alpha]} |\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})|^2$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{1}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|^2 = \sum_{[\boldsymbol{\lambda}]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|^2.$$

On impose alors que les termes coïncident (à l'ordre près).

Une condition supplémentaire sur la cellularité

On a d'une part $\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \sum_{\ell \in L} |\mathcal{T}(\ell)|^2$, et d'autre part :

$$\dim \mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{[\alpha]}(q)}{p} = \frac{1}{p} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \models [\alpha]} |\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})|^2$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{1}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|^2 = \sum_{[\boldsymbol{\lambda}]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|^2.$$

On impose alors que les termes coïncident (à l'ordre près).

Théorème

Soit N le nombre de paires $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ telles que $\mu(\psi_{\mathfrak{st}})^* = \mu(\psi_{\mathfrak{st}})$. Alors :

$$N = \sum_{\ell \in L} |\mathcal{T}(\ell)| = \sum_{[\boldsymbol{\lambda}]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| + |\{(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) : \sigma^{p/2}(\psi_{\mathfrak{st}}) = \psi_{\mathfrak{ts}}\}| \mathbf{1}_{p\ pair}.$$

Non-cellularité de $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$: cas p impair

On a donc :

$$N = \sum_{[\lambda]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{[\lambda]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|.$$

Non-cellularité de $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$: cas p impair

On a donc :

$$N = \sum_{[\lambda]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{[\lambda]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|.$$

Théorème

On suppose que p est impair et que $|[\alpha]| < p$. S'il existe un $\boldsymbol{\lambda} \models_r [\alpha]$ tel que $|[\boldsymbol{\lambda}]| < p$, alors l'algèbre $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$ n'est pas cellulaire.

Non-cellularité de $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$: cas p impair

On a donc :

$$N = \sum_{[\boldsymbol{\lambda}]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{[\boldsymbol{\lambda}]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})|.$$

Théorème

On suppose que p est impair et que $|[\alpha]| < p$. S'il existe un $\boldsymbol{\lambda} \models_r [\alpha]$ tel que $|[\boldsymbol{\lambda}]| < p$, alors l'algèbre $\mathrm{H}^{\sigma}_{[\alpha]}(q)$ n'est pas cellulaire.

Conjecture

La condition du théorème est toujours vérifiée.

Exemple

On prend $r = p = 2$ et $e = 4$. La 4-composition $\alpha := (1, 1, 1, 1)$ vérifie $|[\alpha]| = 1 < 2$, et elle est associée à $\boldsymbol{\lambda} := (2, 2)$ qui vérifie $|[\boldsymbol{\lambda}]| = 1 < 2$.

La condition impose :

$$\sum_{[\lambda]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{[\lambda]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| + |\{(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) : \sigma^{p/2}(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = \psi_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}\}|.$$

$\rightsquigarrow$ Il faut donc des renseignements sur $\sigma^{p/2}$.

(Non-)cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas p pair

La condition impose :

$$\sum_{[\lambda]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{[\lambda]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| + |\{(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) : \sigma^{p/2}(\psi_{\mathfrak{st}}) = \psi_{\mathfrak{ts}}\}|.$$

$\rightsquigarrow$ Il faut donc des renseignements sur $\sigma^{p/2}$.

Quelques cas pour $r = p = 2$:

- si $n = e = 2$, l'égalité est vérifiée et on peut en effet trouver une structure cellulaire compatible ;

(Non-)cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas p pair

La condition impose :

$$\sum_{[\lambda]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{[\lambda]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| + |\{(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) : \sigma^{p/2}(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = \psi_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}\}|.$$

$\rightsquigarrow$ Il faut donc des renseignements sur $\sigma^{p/2}$.

Quelques cas pour $r = p = 2$:

- si $n = e = 2$, l'égalité est vérifiée et on peut en effet trouver une structure cellulaire compatible ;
- si $n = 4$ et $e \in \{2, 6\}$ l'égalité n'est pas vérifiée ;

(Non-)cellularité de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas p pair

La condition impose :

$$\sum_{[\lambda]} \frac{p}{|[\boldsymbol{\lambda}]|} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| = \sum_{[\lambda]} |\mathrm{Std}_0(\boldsymbol{\lambda})| + |\{(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) : \sigma^{p/2}(\psi_{\mathfrak{st}}) = \psi_{\mathfrak{ts}}\}|.$$

$\rightsquigarrow$ Il faut donc des renseignements sur $\sigma^{p/2}$.

Quelques cas pour $r = p = 2$:

- si $n = e = 2$, l'égalité est vérifiée et on peut en effet trouver une structure cellulaire compatible ;
- si $n = 4$ et $e \in \{2, 6\}$ l'égalité n'est pas vérifiée ;
- si $n = e = 4$ l'égalité est vérifiée.

Fin

Merci de votre attention !

Extra : matrice de σ dans la base des $\psi_{\mathfrak{st}}$

Théorème

On suppose que $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *est semi-simple. La matrice de* σ *dans la base des* $\psi_{\mathfrak{st}}$ *est une matrice de permutation, que l'on peut explicitement décrire.*

Remarque

La matrice de σ dans la base des $m_{\mathfrak{st}}$ n'est pas du tout une matrice de permutation.

Extra : matrice de σ dans la base des $\psi_{\mathfrak{st}}$

Théorème

On suppose que $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *est semi-simple. La matrice de* σ *dans la base des* $\psi_{\mathfrak{st}}$ *est une matrice de permutation, que l'on peut explicitement décrire.*

Remarque

La matrice de σ dans la base des $m_{\mathfrak{st}}$ n'est pas du tout une matrice de permutation.

Conjecture

Soit (a_{ij}) *la matrice de* σ *dans la base des* $\psi_{\mathfrak{st}}$*. Alors :*

- $a_{ii} = 0$ ($\checkmark$) ;
- $\forall i, \exists !(i_1 = i, i_2, \ldots, i_p), a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_p i_1} \neq 0$ (???) ;
- *on peut choisir un ordre tel que* (a_{ij}) *soit triangulaire par blocs de taille* p*.*