Ensembles basiques canoniques pour les algèbres de Hecke via les algèbres de Cherednik

Mémoire de M2

Salim Rostam
ENS Rennes

Sous la direction de Maria Chlouveraki
Université de Versailles–Saint-Quentin

22 juin 2015

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ admet pour générateurs les $s_i := (i, i+1)$ pour $1 \leq i < n$ avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n-1]\!], \qquad & s_i^2 = 1 \\ \forall |i-j| > 1, \qquad & s_i s_j = s_j s_i \\ \forall i \in [\![1, n-2]\!], \qquad & s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{aligned}$$

Sommaire

Repérage

Groupes de réflexions complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une *pseudo-réflexion* de V est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(V)$ de V d'ordre fini tel que $\dim \ker(u - \mathrm{id}_V) = \dim(V) - 1$.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une *pseudo-réflexion* de V est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(V)$ de V d'ordre fini tel que $\dim \ker(u - \mathrm{id}_V) = \dim(V) - 1$.

Définition

Un *groupe de réflexions complexe* est un sous-groupe *fini* de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des pseudo-réflexions.

Exemple : un groupe de réflexions réel

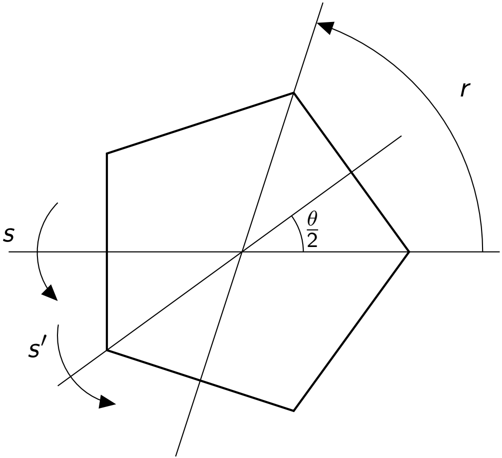


FIGURE – $D_5 = \langle r, s \rangle = \langle s, s' \rangle$

Classification

Définition

Soient $d, e, n \in \mathbb{N}^*$. On définit le groupe $G(de, e, n)$ comme l'ensemble des matrices carrées monomiales de taille n à coefficients dans $\mu_{de}(\mathbb{C})$, telles que le produit des coefficients non nuls est un élément de $\mu_d(\mathbb{C})$.

Classification

Définition

Soient $d, e, n \in \mathbb{N}^*$. On définit le groupe $G(de, e, n)$ comme l'ensemble des matrices carrées monomiales de taille n à coefficients dans $\mu_{de}(\mathbb{C})$, telles que le produit des coefficients non nuls est un élément de $\mu_d(\mathbb{C})$.

Théorème (Shephard–Todd, 1953)

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexe irréductible. L'une des deux assertions suivante est vérifiée :

- il existe $d, e, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $W \simeq G(de, e, n)$;
- le groupe W est isomorphe à l'un des 34 groupes exceptionnels G_n (pour $n = 4, \ldots, 37$).

Le groupe $G(d,1,n)$

Théorème (Ariki–Koike, 1994)

Le groupe $G(d,1,n)$ admet une présentation avec les générateurs $\sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1}$ et les relations suivantes :

- $\sigma_i^2 = 1$ pour $i = 1\ldots n-1$;
- $\sigma_0^d = 1$;
- $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ si $|i-j| > 1$;
- $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ pour $i = 1\ldots n-2$;
- $\sigma_0\sigma_1\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0\sigma_1\sigma_0$;

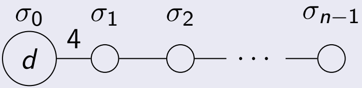
Le groupe $G(d, 1, n)$

Théorème (Ariki–Koike, 1994)

Le groupe $G(d, 1, n)$ admet une présentation avec les générateurs $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ et les relations suivantes :

- $\sigma_i^2 = 1$ pour $i = 1 \ldots n-1$;
- $\sigma_0^d = 1$;
- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i - j| > 1$;
- $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ pour $i = 1 \ldots n-2$;
- $\sigma_0\sigma_1\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0\sigma_1\sigma_0$;

résumées dans le diagramme suivant :



Repérage

Terminologie

Soit $\mathcal{H}$ une k-algèbre.

- Une *représentation* de $\mathcal{H}$ est un morphisme $\rho : \mathcal{H} \to \mathrm{End}_k(V)$ de k-algèbres où V est un k-module de type fini. On note $\mathrm{Irr}(\mathcal{H})$ l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathcal{H}$.
- On dit que $\mathcal{H}$ est *semi-simple* si elle est somme directe d'algèbres simples, *i.e.* n'admettant pas d'idéal bilatère propre non nul.
- On dit que $\mathcal{H}$ est *déployée* si pour tout $\mathcal{H}$-module simple V on a $\mathrm{End}_{\mathcal{H}}(V) \simeq k$.

Éléments de Schur

Une *forme symétrisante* sur $\mathcal{H}$ est une application k-linéaire $t : \mathcal{H} \to k$ vérifiant $t(ab) = t(ba)\ \forall a, b \in \mathcal{H}$, telle que l'application

$$\hat{t} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(\mathcal{H}, k) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \hat{t}(a)(x) := t(ax)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules.

Éléments de Schur

Une *forme symétrisante* sur $\mathcal{H}$ est une application k-linéaire $t : \mathcal{H} \to k$ vérifiant $t(ab) = t(ba)\ \forall a, b \in \mathcal{H}$, telle que l'application

$$\hat{t} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(\mathcal{H}, k) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \hat{t}(a)(x) := t(ax)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules.

Définition

Supposons que l'algèbre $K\mathcal{H} := K \otimes_k \mathcal{H}$ est semi-simple déployée. Il existe des éléments non nuls $s_\chi \in K$, appelés *éléments de Schur*, tels que :

$$t = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(K\mathcal{H})} \frac{1}{s_\chi} \chi$$

Algèbre de Hecke de G_{16}

On considère $W = G_{16} = \langle s, t \mid s^5 = t^5 = 1, sts = tst \rangle$. Une *algèbre de Hecke* associée à $W = G_{16}$ est la $\mathbb{C}[\{\mathbf{q}_j^{\pm 1}\}_{0 \leq j \leq 4}]$-algèbre de présentation

$$\left\langle S, T \;\middle|\; \prod_{j=0}^{4}(S - \zeta_5^j \mathbf{q}_{s,j}) = \prod_{j=0}^{4}(T - \zeta_5^j \mathbf{q}_{t,j}) = 0, STS = TST \right\rangle$$

où l'on pose $\mathbf{q}_{s,j} = \mathbf{q}_{t,j} =: \mathbf{q}_j \; \forall j = 0 \ldots 4$ car s et t sont conjugués dans W.

Algèbre de Hecke de G_{16}

On considère $W = G_{16} = \langle s, t \mid s^5 = t^5 = 1, sts = tst \rangle$. Une *algèbre de Hecke* associée à $W = G_{16}$ est la $\mathbb{C}[\{\mathbf{q}_j^{\pm 1}\}_{0 \leq j \leq 4}]$-algèbre de présentation

$$\left\langle S, T \;\middle|\; \prod_{j=0}^{4}(S - \zeta_5^j \mathbf{q}_{s,j}) = \prod_{j=0}^{4}(T - \zeta_5^j \mathbf{q}_{t,j}) = 0, STS = TST \right\rangle$$

où l'on pose $\mathbf{q}_{s,j} = \mathbf{q}_{t,j} =: \mathbf{q}_j \; \forall j = 0 \ldots 4$ car s et t sont conjugués dans W.

Remarque

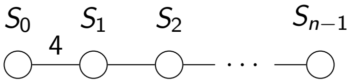
Si les $\mathbf{q}_{s,j}$ sont des indéterminées (on parle d'algèbre de Hecke *générique*), la spécialisation $\mathbf{q}_{s,j} \mapsto 1$ fait retomber sur l'algèbre $\mathbb{C}[W]$ du groupe W.

Algèbre de Hecke de $G(d, 1, n)$

Une algèbre de Hecke du groupe $G(d, 1, n)$ est donnée par l'algèbre sur $\mathbb{C}[\{\mathbf{q}_{\sigma_0,j}^{\pm 1}\}_{0\leq j<d}, \mathbf{q}_0^{\pm 1}, \mathbf{q}_1^{\pm 1}]$ de générateurs $S_0, \ldots, S_{n-1}$ avec relations suivantes :

$$\prod_{j=0}^{d-1}(S_0 - \zeta_d^j \mathbf{q}_{\sigma_0,j}) = 0$$

$$(S_i - \mathbf{q}_0)(S_i + \mathbf{q}_1) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i < n$$



Résultats importants

Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke d'un groupe de réflexions complexe W.

Théorème de déformation de Tits (version faible)

Si $K\mathcal{H} := K \otimes_k \mathcal{H}$ est *semi-simple déployée* alors

$$\mathrm{Irr}(K\mathcal{H}) \simeq \mathrm{Irr}(W)$$

Résultats importants

Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke d'un groupe de réflexions complexe W.

Théorème de déformation de Tits (version faible)

Si $K\mathcal{H} := K \otimes_k \mathcal{H}$ est *semi-simple déployée* alors

$$\mathrm{Irr}(K\mathcal{H}) \simeq \mathrm{Irr}(W)$$

Théorème / Conjecture

On suppose que $\mathcal{H}$ est l'algèbre générique.

- L'algèbre $\mathcal{H}$ est libre sur k, de rang $|W|$.
- Il existe une « bonne » forme symétrisante t sur $\mathcal{H}$, qui se spécialise sur la forme symétrisante canonique de W via $\mathbf{q}_{s,j} \mapsto 1$.

Matrice de décomposition

Soit $\theta : k \to K$ une *spécialisation* de k (un morphisme d'anneau avec $K = \mathrm{Frac}\,\theta(k)$) et soit $\mathbf{k}$ un corps dans lequel k est intégralement clos.

Théorème / Définition

Sous certaines hypothèses, on dispose d'une *matrice de décomposition* qui décrit comment se décomposent les modules simples de $\mathbf{k}\mathcal{H}$ selon les modules simples de $K\mathcal{H}$.

L'idée est que la matrice de décomposition est la matrice

$$\mathcal{D}_\theta = ([E : M])_{E \in \mathrm{Irr}(\mathbf{k}\mathcal{H}), M \in \mathrm{Irr}(K\mathcal{H})}$$

Matrice de décomposition

Soit $\theta : k \to K$ une *spécialisation* de k (un morphisme d'anneau avec $K = \mathrm{Frac}\,\theta(k)$) et soit $\mathbf{k}$ un corps dans lequel k est intégralement clos.

Théorème / Définition

Sous certaines hypothèses, on dispose d'une *matrice de décomposition* qui décrit comment se décomposent les modules simples de $\mathbf{k}\mathcal{H}$ selon les modules simples de $K\mathcal{H}$.

L'idée est que la matrice de décomposition est la matrice

$$\mathcal{D}_\theta = ([E : M])_{E \in \mathrm{Irr}(\mathbf{k}\mathcal{H}), M \in \mathrm{Irr}(K\mathcal{H})}$$

Définition

On dit que $\mathcal{B}_\theta \subseteq \mathrm{Irr}(\mathbf{k}\mathcal{H})$ est un ensemble *basique* pour θ si $\mathcal{B}_\theta \simeq \mathrm{Irr}(K\mathcal{H})$ et si la matrice de décomposition entre $\mathcal{B}_\theta$ et $\mathrm{Irr}(K\mathcal{H})$ est unitriangulaire.

Repérage

Algèbres de Cherednik

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexe de générateurs S ; on note $\mathbf{R} := \mathbb{C}[\{\mathbf{h}_{s,j}\}]$ avec $s \in S$, $0 \leq j <$ ordre(s) et des indéterminées qui vérifient $\mathbf{h}_{s,j} = \mathbf{h}_{t,j}$ si $s, t \in S$ sont conjugués.

Algèbres de Cherednik

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexe de générateurs S ; on note $\mathbf{R} := \mathbb{C}[\{\mathbf{h}_{s,j}\}]$ avec $s \in S$, $0 \leq j < \mathrm{ordre}(s)$ et des indéterminées qui vérifient $\mathbf{h}_{s,j} = \mathbf{h}_{t,j}$ si $s, t \in S$ sont conjugués.

Définition indicative

L'*algèbre de Cherednik* $\mathbf{H}$ associée à W est une $\mathbf{R}$-algèbre générée par les éléments de V, de W et de V^*, quotientée par de bonnes relations.

Algèbres de Cherednik

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexe de générateurs S ; on note $\mathbf{R} := \mathbb{C}[\{\mathbf{h}_{s,j}\}]$ avec $s \in S$, $0 \leq j <$ ordre(s) et des indéterminées qui vérifient $\mathbf{h}_{s,j} = \mathbf{h}_{t,j}$ si $s, t \in S$ sont conjugués.

Définition indicative

L'*algèbre de Cherednik* $\mathbf{H}$ associée à W est une $\mathbf{R}$-algèbre générée par les éléments de V, de W et de V^*, quotientée par de bonnes relations.

Pour $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbb{C}$, on note $\mathbf{H}_\Psi := \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbb{C}$ et $\Theta : \mathbb{C}[\{\mathbf{q}_{\mathbf{s},\mathbf{j}}\}] \to \mathbb{C}$ le morphisme donné par $\Theta(\mathbf{q}_{s,j}) := e^{2i\pi\Psi(\mathbf{h}_{s,j})}$. On note également $\mathcal{O}_\Psi$ la catégorie des $\mathbf{H}_\Psi$-modules de type finis localement nilpotents pour l'action de $V \subseteq \mathbb{C}[V^*]$.

Algèbres de Cherednik

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexe de générateurs S ; on note $\mathbf{R} := \mathbb{C}[\{\mathbf{h}_{s,j}\}]$ avec $s \in S$, $0 \leq j < \mathrm{ordre}(s)$ et des indéterminées qui vérifient $\mathbf{h}_{s,j} = \mathbf{h}_{t,j}$ si $s, t \in S$ sont conjugués.

Définition indicative

L'*algèbre de Cherednik* $\mathbf{H}$ associée à W est une $\mathbf{R}$-algèbre générée par les éléments de V, de W et de V^*, quotientée par de bonnes relations.

Pour $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbb{C}$, on note $\mathbf{H}_\Psi := \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbb{C}$ et $\Theta : \mathbb{C}[\{\mathbf{q}_{s,j}\}] \to \mathbb{C}$ le morphisme donné par $\Theta(\mathbf{q}_{s,j}) := e^{2i\pi\Psi(\mathbf{h}_{s,j})}$. On note également $\mathcal{O}_\Psi$ la catégorie des $\mathbf{H}_\Psi$-modules de type finis localement nilpotents pour l'action de $V \subseteq \mathbb{C}[V^*]$.

Il y a un foncteur exact $\mathrm{KZ}_\Psi : \mathcal{O}_\Psi \to \mathcal{H}_\Theta$-mod.

Ensembles basiques canoniques via KZ_Ψ

Les objets standards de la catégorie $\mathcal{O}_\Psi$ sont les $\Delta_\Psi(E)$ pour $E \in \mathrm{Irr}(W)$; on note $\mathrm{L}_\Psi(E)$ leur tête, qui sont des modules irréductibles.

Pour une certaine fonction ψ, on va voir que l'ensemble $\mathbf{B} := \{E' \in \mathrm{Irr}(W) : \mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E')) \neq 0\}$ est un ensemble basique pour $W = G(d, 1, n)$

Ensembles basiques canoniques via KZ_Ψ

Les objets standards de la catégorie $\mathcal{O}_\Psi$ sont les $\Delta_\Psi(E)$ pour $E \in \mathrm{Irr}(W)$; on note $\mathrm{L}_\Psi(E)$ leur tête, qui sont des modules irréductibles.
Pour une certaine fonction ψ, on va voir que l'ensemble $\mathbf{B} := \{E' \in \mathrm{Irr}(W) : \mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E')) \neq 0\}$ est un ensemble basique pour $W = G(d, 1, n)$, « canonique » au sens où l'on va donner une fonction $a : \mathrm{Irr}(W) \to \mathbb{Z}$ telle que :

- si $[\Delta_\psi(E) : \mathrm{L}_\psi(E')] \neq 0$ alors $a_E > a_{E'}$ ou $E = E'$;
- $a_E = -\mathrm{val}\, s_E$.

Intermède combinatoire

- Une *partition* de l'entier n est une suite décroissante λ d'entiers strictement positifs ; on note $|\lambda| := n$.
- Une *d-partition* de n est un d-uplet de partitions $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d)})$ tel que $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(d)}| = n$; on note $\lambda \vDash_d n$.

Proposition

Les d-partitions de n paramètrent les représentations irréductibles de $G(d, 1, n)$; on notera $\mathrm{Irr}(G(d, 1, n)) = \{E^\lambda : \lambda \vDash_d n\}$.

Intermède combinatoire

- Une *partition* de l'entier n est une suite décroissante λ d'entiers strictement positifs ; on note $|\lambda| := n$.
- Une *d-partition* de n est un d-uplet de partitions $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ tel que $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(d)}| = n$; on note $\lambda \vDash_d n$.

Proposition

Les d-partitions de n paramètrent les représentations irréductibles de $G(d,1,n)$; on notera $\mathrm{Irr}(G(d,1,n)) = \{E^\lambda : \lambda \vDash_d n\}$.

Finalement, soient $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \cdots)$ deux partitions d'un *même entier*.

- $\lambda \lhd \mu \overset{\text{déf}}{\iff} \left[\lambda \neq \mu \text{ et } \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{j} \mu_i \quad \forall j\right]$.
- $n(\lambda) := \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i$.

Lemme

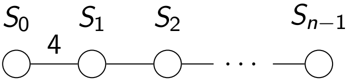
Si $\lambda \lhd \mu$ alors $n(\lambda) > n(\mu)$.

Algèbre de travail

Soient $e, r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{s}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$ avec $0 < u_j - u_i < e$ si $i < j$; on considère l'algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}$ associée à $G(d, 1, n)$.

Algèbre de travail

Soient $e, r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{s}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$ avec $0 < u_j - u_i < e$ si $i < j$; on considère l'algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}$ associée à $G(d, 1, n)$. On considère des bons morphismes ψ et θ qui spécialisent $\mathcal{H}$ en l'algèbre $\mathcal{H}_\theta$, engendrée par les S_i avec les relations de tresses



et les relations (avec $\zeta_e := \exp\left(\frac{2i\pi}{e}\right)$) :

$$\prod_{j=0}^{d-1} (S_0 - \zeta_e^{s_j}) = 0$$

$$(S_i - \zeta_e^r)(S_i + 1) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i < n$$

Définition de la fonction a

On pose $\mathbf{t} := \frac{1}{r}(\mathbf{s} - \mathbf{u})$. Soit z un entier naturel assez grand et soit $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d)})$ une d-composition de n. Pour chaque $1 \leq i \leq d$, on définit la suite suivante :

$$\mathfrak{B}^i := \left(\lambda_t^{(i)} - t + t_i + z\right)_{1 \leq t \leq z + [t_i]}$$

puis $\mathfrak{B} := (\mathfrak{B}^1, \dots, \mathfrak{B}^d)$.

Définition de la fonction a

On pose $\mathbf{t} := \frac{1}{r}(\mathbf{s} - \mathbf{u})$. Soit z un entier naturel assez grand et soit $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ une d-composition de n. Pour chaque $1 \leq i \leq d$, on définit la suite suivante :

$$\mathfrak{B}^i := \left(\lambda_t^{(i)} - t + t_i + z\right)_{1 \leq t \leq z + [t_i]}$$

puis $\mathfrak{B} := (\mathfrak{B}^1, \ldots, \mathfrak{B}^d)$. Si $\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda) = (\kappa_t(\lambda))_t$ est la suite des éléments de $\mathfrak{B}$ rangés par ordre décroissant, on définit :

$$a_{\mathbf{t},r}(\lambda) := r(n_{\mathbf{t}}(\lambda) - n_{\mathbf{t}}(\emptyset))$$

où $n_{\mathbf{t}}(\lambda) := n(\kappa_t(\lambda))$ et $\emptyset \vDash_d 0$.

Travail préparatoire

Si $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ est une d-composition et si $\gamma = (a, b, c)$ en est un nœud (*i.e.* $1 \leq c \leq d$, $a \geq 1$ et $1 \leq b \leq \lambda_a^{(c)}$) on définit les quantités suivantes :

$$\eta(\gamma) := b - a + t_c \qquad\qquad \vartheta(\gamma) := b - a + \frac{s_c}{r}$$

Travail préparatoire

Si $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(d)})$ est une d-composition et si $\gamma = (a, b, c)$ en est un nœud (*i.e.* $1 \leq c \leq d$, $a \geq 1$ et $1 \leq b \leq \lambda_a^{(c)}$) on définit les quantités suivantes :

$$\eta(\gamma) := b - a + t_c \qquad \vartheta(\gamma) := b - a + \frac{s_c}{r}$$

Proposition ([CGG] dans le cas $r = 1$)

Soient λ et λ' deux d-compositions de n. Supposons que l'on puisse numéroter les nœuds de λ (respectivement λ') avec $[\lambda] = \{\gamma_i\}$ (resp. $[\lambda'] = \{\gamma'_i\}$) de telle sorte que :

$$\eta(\gamma_i) < \eta(\gamma'_i) \text{ si } \gamma_i \neq \gamma'_i$$

Alors $\lambda = \lambda'$ ou $\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda) \lhd \kappa_{\mathbf{t}}(\lambda')$, auquel cas $a_{\mathbf{t},r}(\lambda) > a_{\mathbf{t},r}(\lambda')$.

Le canon est là

Théorème clé (Dunkl–Griffeth)

Soient λ et λ' deux d-partitions de n telles que :

$$[\Delta_\psi(E^\lambda) : \mathrm{L}_\psi(E^{\lambda'})] \neq 0$$

On peut indexer les nœuds de λ par $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ et de λ' par $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n$ de façon à ce qu'il existe des entiers $\mu_i \geq 0$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \mu_i \equiv c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) \pmod{d} \\ \mu_i = c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) + d\dfrac{r[\vartheta(\gamma'_i) - \vartheta(\gamma_i)]}{e} \end{cases}$$

Le canon est là

Théorème clé (Dunkl–Griffeth)

Soient λ et λ' deux d-partitions de n telles que :

$$[\Delta_\psi(E^\lambda) : \mathrm{L}_\psi(E^{\lambda'})] \neq 0$$

On peut indexer les nœuds de λ par $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ et de λ' par $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n$ de façon à ce qu'il existe des entiers $\mu_i \geq 0$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \mu_i \equiv c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) \pmod{d} \\ \mu_i = c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) + d\,\dfrac{r[\vartheta(\gamma'_i) - \vartheta(\gamma_i)]}{e} \end{cases}$$

Théorème ([CGG] dans le cas $r = 1$)

Soient λ et λ' deux d-partitions de n. Si $[\Delta_\psi(E^\lambda) : \mathrm{L}_\psi(E^{\lambda'})] \neq 0$ alors $a_{\mathbf{t},r}(\lambda) > a_{\mathbf{t},r}(\lambda')$ ou $\lambda = \lambda'$.

Conclusion

Comme KZ_ψ est exact, si $\mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E')) \neq 0$ alors :

$$[\mathrm{KZ}_\psi(\Delta_\psi(E)) : \mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E'))] = [\Delta_\psi(E)) : \mathrm{L}_\psi(E')]$$

D'après le théorème précédent, l'ensemble :

$$\mathbf{B} = \left\{ E^\lambda \in \mathrm{Irr}(W) : \mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E^\lambda)) \neq 0 \right\}$$

est bien un ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}_\theta$, pour l'ordre induit par la fonction $a_{\mathbf{t},r}$.

Conclusion

Comme KZ_ψ est exact, si $\mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E')) \neq 0$ alors :

$$[\mathrm{KZ}_\psi(\Delta_\psi(E)) : \mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E'))] = [\Delta_\psi(E)) : \mathrm{L}_\psi(E')]$$

D'après le théorème précédent, l'ensemble :

$$\mathbf{B} = \left\{ E^\lambda \in \mathrm{Irr}(W) : \mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E^\lambda)) \neq 0 \right\}$$

est bien un ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}_\theta$, pour l'ordre induit par la fonction $a_{\mathbf{t},r}$.

Remarque

On sait donner une interprétation combinatoire de la non annulation de $\mathrm{KZ}_\psi(\mathrm{L}_\psi(E^\lambda))$.

Références principales

- M. Chlouveraki, I. Gordon et S. Griffeth, *Cell modules and canonical basic sets for Hecke algebras from Cherednik algebras* (2012).
- M. Geck et N. Jacon, *Representations of Hecke Algebras at Roots of Unity* (2011).
- M. Geck et G. Pfeiffer, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori–Hecke Algebras* (2000).