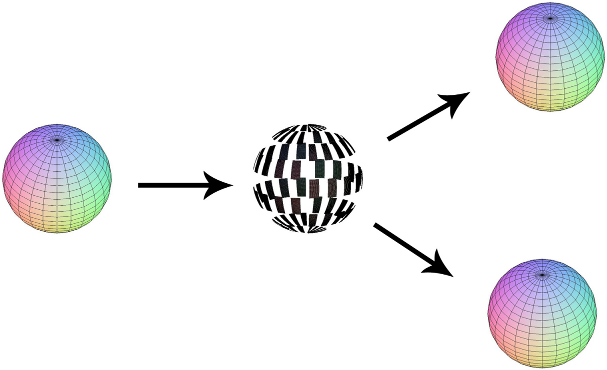
Autour du paradoxe de Banach-Tarski

Salim Rostam Tristan Robert

1er mai 2012

Introduction



Sommaire

Sommaire

Définitions

Parties (finiment) G-équidécomposables

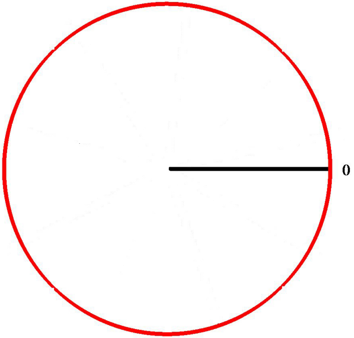
$G \curvearrowright E, A \subset E, B \subset E$

$A \underset{G}{\equiv} B$ si et seulement si

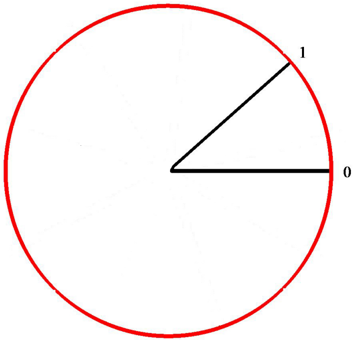
- $\exists n \in \mathbb{N}^*, A = \sqcup_{k=1}^n A_k$ et $B = \sqcup_{k=1}^n B_k$
- $\exists g_1, ..., g_n \in G$ tels que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, g_k(A_k) = B_k$.

Exemple : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ sont équidécomposables sous l'action du groupe des translations $\{\tau_r : x \mapsto (x + r)\}$. En effet : $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \sqcup \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \sqcup \tau_1(\mathbb{N})$.

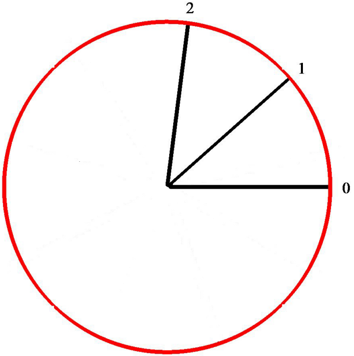
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



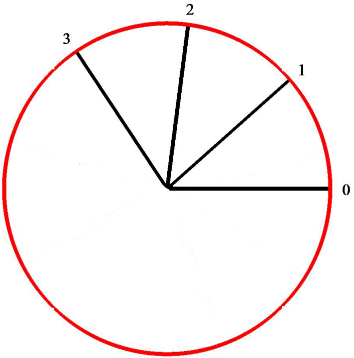
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



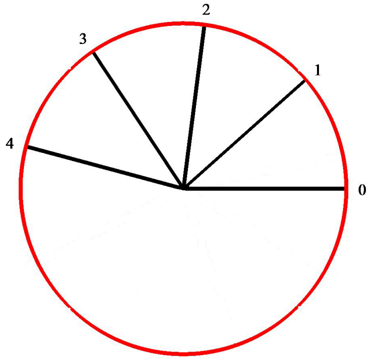
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



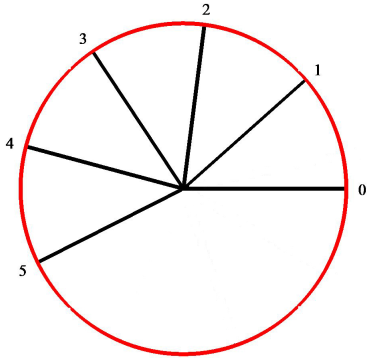
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



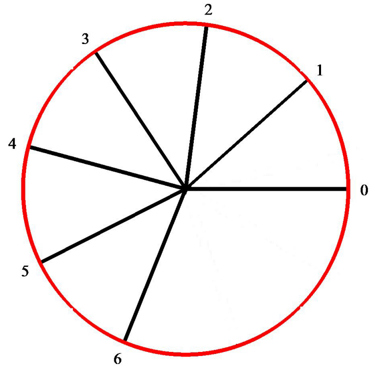
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



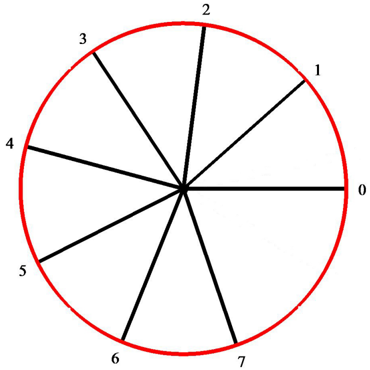
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



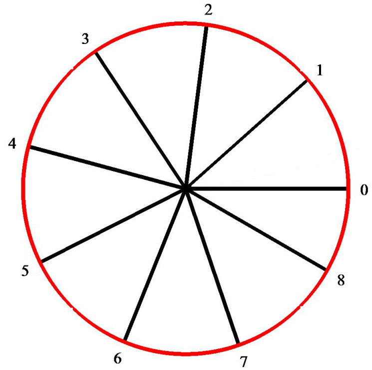
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



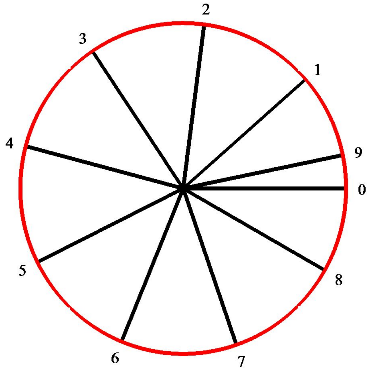
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



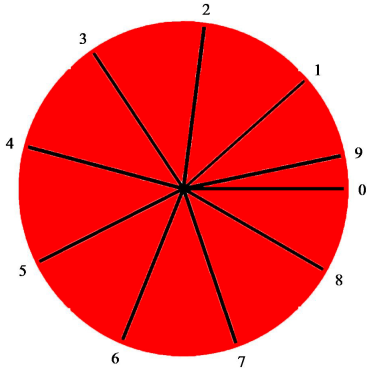
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



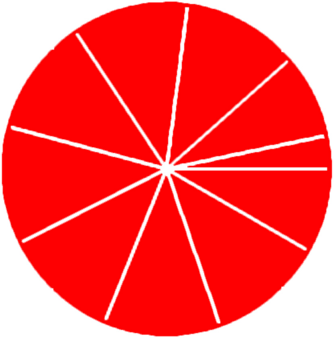
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \setminus]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



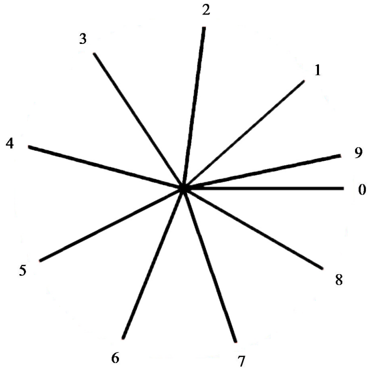
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



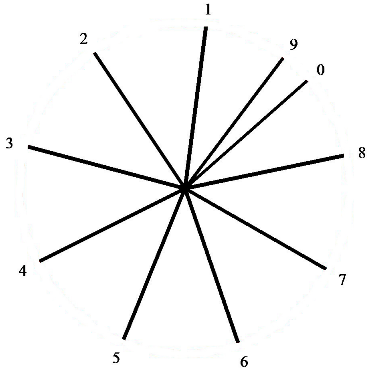
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1) \backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



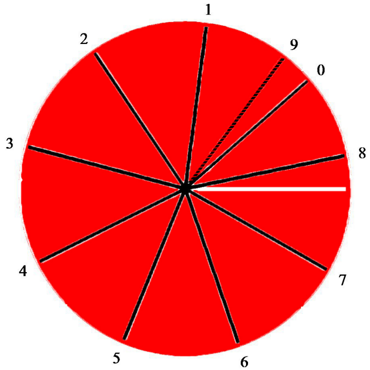
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



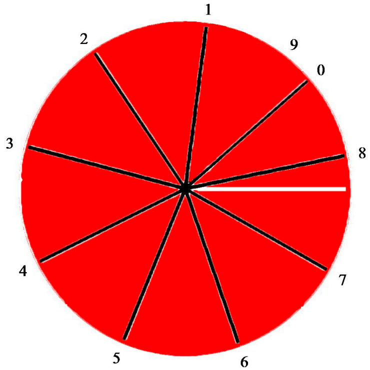
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



<u>*Exemple :*</u> Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



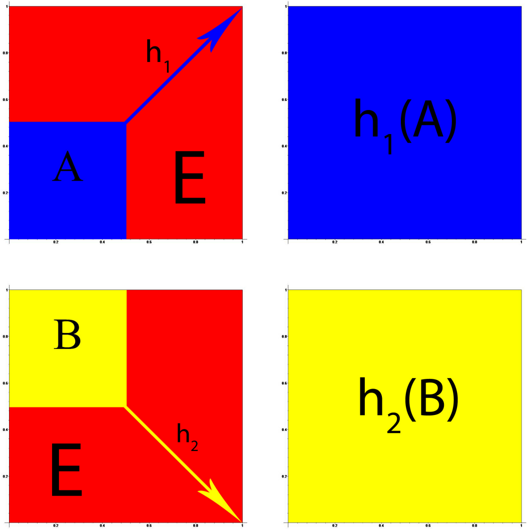
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, le disque fermé $\bar{D}(0,1)$ et $\bar{D}(0,1)\backslash]0,1]$ sont $SO(2)$-équidécomposables.



Ensemble G-paradoxal

E est dit G-**paradoxal** si $\exists A, B \in E$ avec A et B disjoints tels que $A \underset{G}{\equiv} E$ et $B \underset{G}{\equiv} E$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, pour $G =$ le groupe des homothéties affines et des translations, le carré $E =]0,1[\times]0,1[$ est paradoxal. En effet, si h_1 (respectivement h_2) est l'homothétie de rapport 2 de centre $(0,0)$ (respectivement $(0,1)$), $A =]0, \frac{1}{2}[\times]0, \frac{1}{2}[$ et $B =]0, \frac{1}{2}[\times]\frac{1}{2}, 1[$, on a bien A et B disjoints avec $h_1(A) = E$ et $h_2(B) = E$.


h_1
A
E
$h_1(A)$
B
E
h_2
$h_2(B)$

Ensemble dédoublable

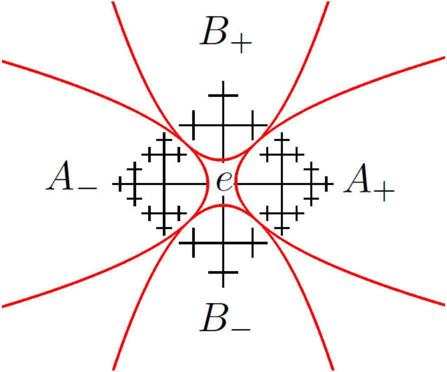
E est dit **dédoublable** si $\exists A, B \in E$ avec $E = A \sqcup B$ tels que $A \underset{G}{\equiv} E$ et $B \underset{G}{\equiv} E$.

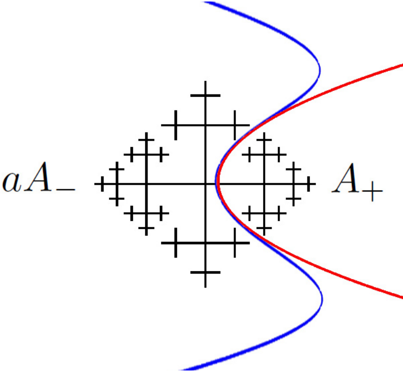
Remarque : E est dédoublable $\Longleftrightarrow$ E est paradoxal.

Sommaire

Théorème

Le groupe libre $F = \langle a, b \rangle$ est paradoxal.





Sommaire

Sommaire

Théorème (Paradoxe de Hausdorff)

$\exists D$ dénombrable $\subset \mathbb{S}^2$ tel que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ est paradoxal.

Théorème

$\mathbb{S}^2$ est paradoxal.

Sommaire

Théorème

$\mathbb{B} \setminus \{0\}$ est $SO(3)$-paradoxale.

Remarque : $\mathbb{B}$ **n'est pas** $SO(3)$-paradoxale.

Théorème *(Paradoxe de Banach-Tarski)*

$\mathbb{B}$ est $\mathcal{D}(3)$-paradoxale, où $\mathcal{D}(3)$ est le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Lors de la "découpe", les morceaux sont nécessairement non tous Lebesgue-mesurables.

Sommaire

On étend le paradoxe de Banach-Tarski aux boules fermées de $\mathbb{R}^3$ de rayon > 0 pour obtenir :

Théorème

Deux ensembles bornés et d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^3$ sont $\mathcal{D}(3)$-équidécomposables.

Sommaire

Définition

Une **mesure universelle finiment-additive** sur E est une application $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (A_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ parties disjointes de } E, \mu(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

.

Théorème

Pour $n \geq 3$, il n'y a pas de mesure universelle finiment-additive sur $\mathbb{R}^n$ qui soit invariante par $\mathcal{D}(n)$ et normalisée sur le cube unité.

Pour $n = 1$ ou 2, $SO(n)$ est commutatif donc le paradoxe de Banach-Tarski n'est plus valable.

Bibliographie

- Pierre de la Harpe, « Mesures finiment additives et paradoxes ». Article issu de *Autour du centenaire de Lebesgue*, Société Mathématique de France, 2004
- Marc Guinot, « Le paradoxe de Banach-Tarski », ALEAS Editeur, 1991
- Stan Wagon, « The Banach-Tarski Paradox », Cambridge University Press