Deux cœurs, c'est trop !

Salim Rostam

Univ Rennes

24 mai 2022

5 minutes Lebesgue

Partitions

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Une partition de (taille) n est une suite $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h > 0)$ d'entiers positifs décroissants de somme n.

Exemple

Les partitions de 5 sont (5), $(4,1)$, $(3,2)$, $(3,1,1)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$.

Partitions

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition

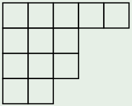
Une partition de (taille) n est une suite $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h > 0)$ d'entiers positifs décroissants de somme n.

Exemple

Les partitions de 5 sont (5), $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$.

On peut représenter une partition à l'aide de son diagramme de Young.

Exemple

Le diagramme de Young de la partition $(5, 3, 3, 2)$ est .

Équerres

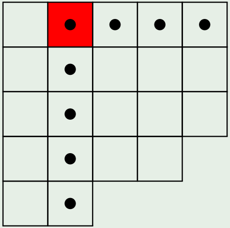
Soit λ une partition.

Définition

Une équerre du diagramme de Young de λ est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée. Sa taille est le nombre de boîtes qu'elle contient.

Exemple

Une équerre de taille 8 pour $\lambda = (5, 5, 5, 4, 2)$:



Cœurs

Soit λ une partition et $s \geq 1$ un entier.

Définition (Cœur)

La partition λ est un *s-cœur* si son diagramme de Young ne possède aucune équerre de taille s.

Exemple

La partition $(7, 4, 3, 2, 1)$ est un s-cœur pour $s \in \{4, 6, 8, 10\}$ et $s \geq 12$.

11	9	7	5	3	2	1
7	5	3	1			
5	3	1				
3	1					
1						

Des cœurs partout !

Proposition

Soit $s \geq 2$. Il y a une infinité de s-cœurs.

Théorème (Granville–Ono 1996)

Soit $s \geq 4$. Pour chaque $n \geq 1$, il existe (au moins) une partition de n qui soit un s-cœur.

Le théorème de Jaclyn Anderson

Théorème (J. Anderson 2002)

Soient $s \geq 2$ et $t \geq 2$ premiers entre eux. Il existe seulement un nombre fini de partitions qui soient à la fois un s-cœur et un t-cœur.

Le théorème de Jaclyn Anderson

Théorème (J. Anderson 2002)

Soient $s \geq 2$ et $t \geq 2$ premiers entre eux. Il existe seulement un nombre fini de partitions qui soient à la fois un s-cœur et un t-cœur.

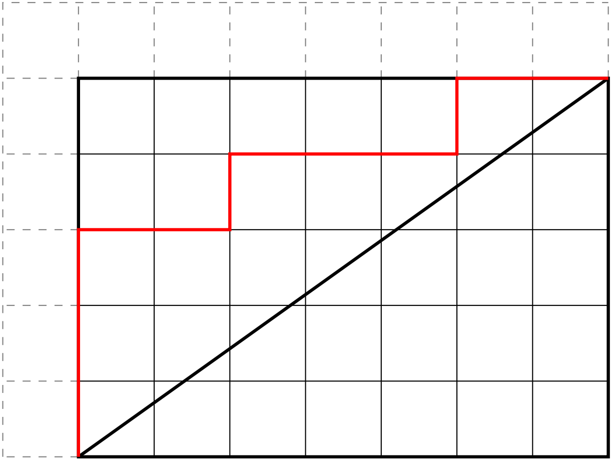
Anderson a même montré que le nombre de partitions qui sont à la fois des s-cœurs et des t-cœurs est exactement :

$$\frac{1}{s+t}\binom{s+t}{s},$$

en montrant que ces partitions sont en bijection avec l'ensemble des chemins de Dyck entre $(0,0)$ et (s,t).

La bijection

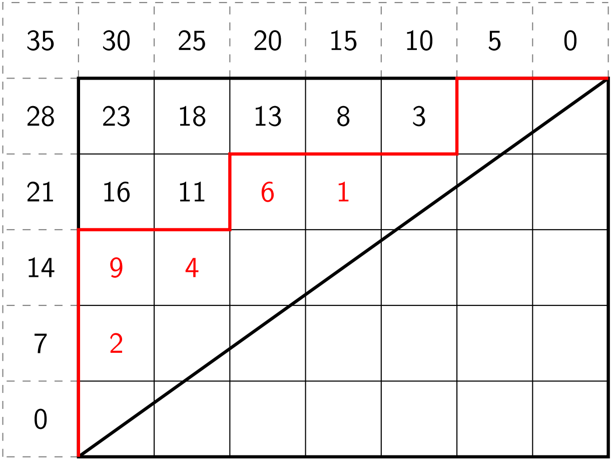
On prend $s = 7$ et $t = 5$.

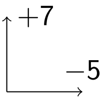


chemin de Dyck entre $(0, 0)$ et $(7, 5)$

La bijection

On prend $s = 7$ et $t = 5$.

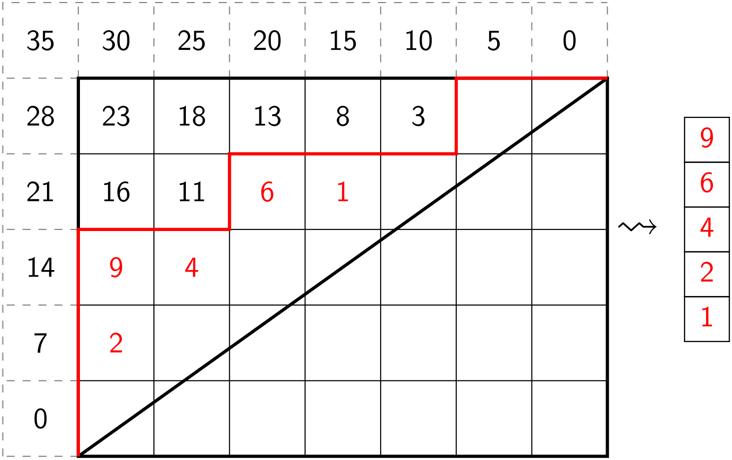


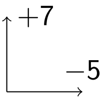


chemin de Dyck entre $(0, 0)$ et $(7, 5)$

La bijection

On prend $s = 7$ et $t = 5$.

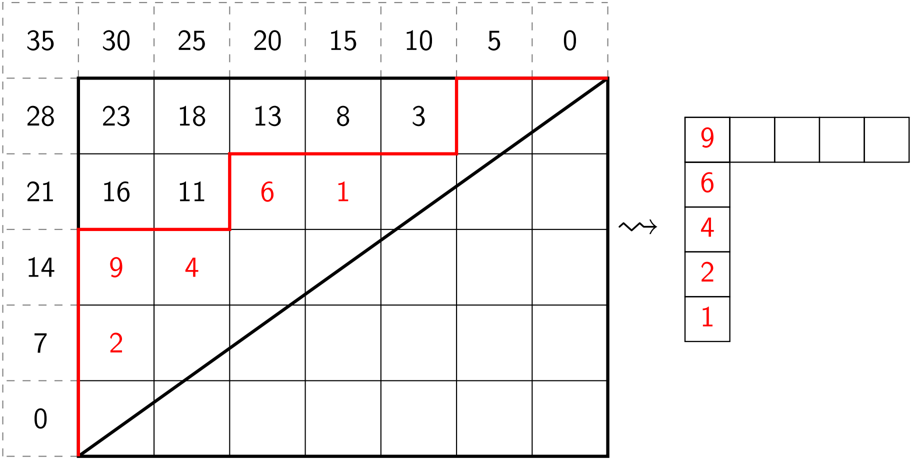


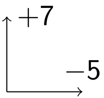


chemin de Dyck entre $(0, 0)$ et $(7, 5)$

La bijection

On prend $s = 7$ et $t = 5$.

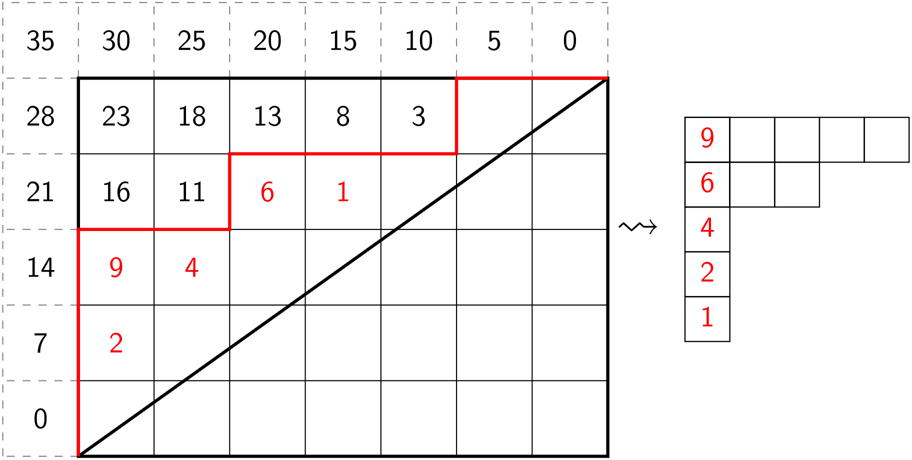




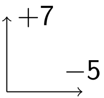
chemin de Dyck entre $(0, 0)$ et $(7, 5)$

La bijection

On prend $s = 7$ et $t = 5$.

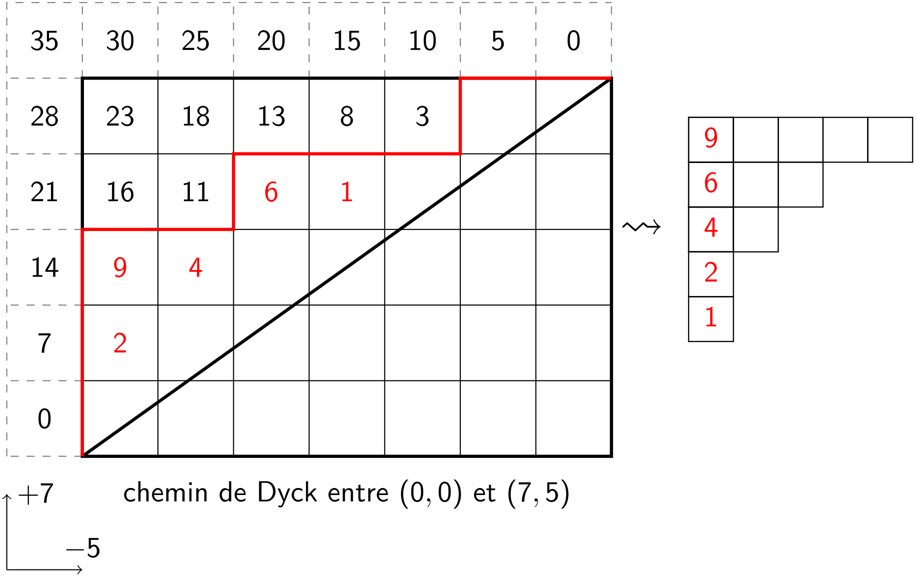


chemin de Dyck entre $(0,0)$ et $(7,5)$



La bijection

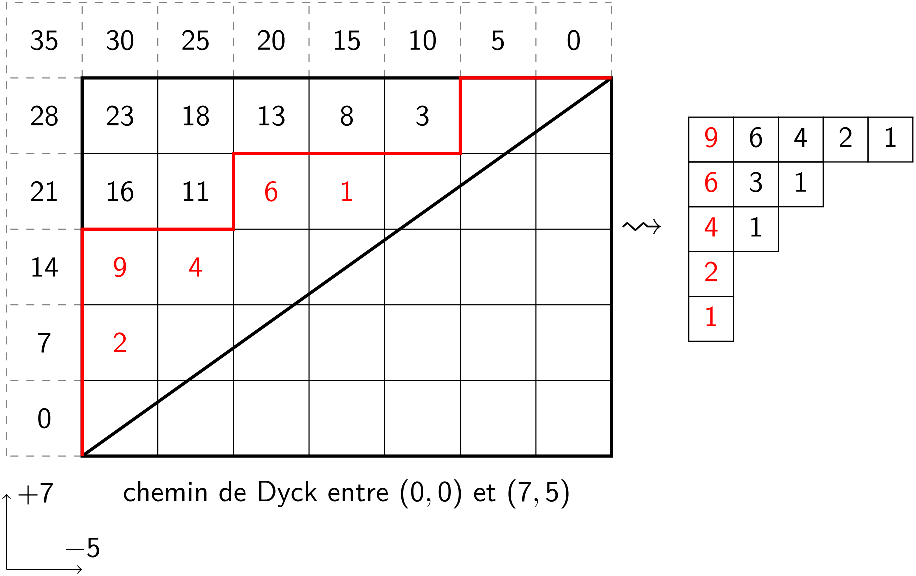
On prend $s = 7$ et $t = 5$.



chemin de Dyck entre $(0,0)$ et $(7,5)$

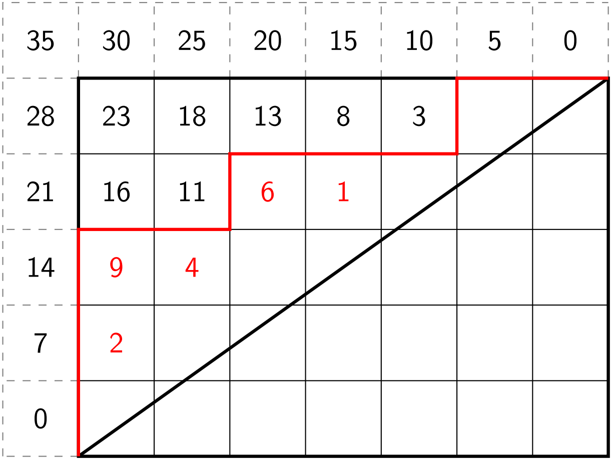
La bijection

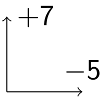
On prend $s = 7$ et $t = 5$.



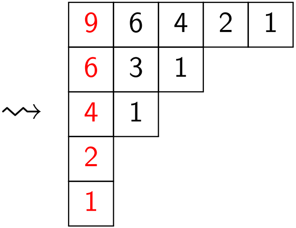
La bijection

On prend $s = 7$ et $t = 5$.





chemin de Dyck entre $(0, 0)$ et $(7, 5)$



une partition qui est à la fois un 7- et un 5-cœur