

# Taille du cœur des partitions sous la mesure de Plancherel

Salim ROSTAM

Univ Rennes

1<sup>er</sup> mars 2022

Séminaire de physique mathématique et topologie algébrique,  
LAREMA

- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - Rubans
  - Cœur
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

# Partitions

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

## Définition

Une **partition** de (taille)  $n$  est une suite  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_h > 0)$  d'entiers positifs décroissants de somme  $n$ .

## Exemple

Les partitions de 5 sont  $(5)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1)$ .

# Partitions

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

## Définition

Une **partition** de (taille)  $n$  est une suite  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_h > 0)$  d'entiers positifs décroissants de somme  $n$ .

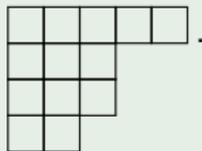
## Exemple

Les partitions de 5 sont  $(5)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1)$ .

On peut représenter une partition à l'aide de son **diagramme de Young**.

## Exemple

Le diagramme de Young de la partition  $(5, 3, 3, 2)$  est



Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . Un **tableau standard de forme  $\lambda$**  est une numérotation des cases du diagramme de Young de  $\lambda$  par les entiers de 1 à  $n$  de sorte que les lignes (resp. les colonnes) soient croissantes de gauche à droite (resp. de haut en bas).

## Exemple

Le tableau 

1	2	5
3	6	7
4		

 est standard de forme  $(3, 3, 1)$ .

On note  $\text{std}(\lambda)$  le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ .

# Mesure de Plancherel

Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . Un **tableau standard de forme  $\lambda$**  est une numérotation des cases du diagramme de Young de  $\lambda$  par les entiers de 1 à  $n$  de sorte que les lignes (resp. les colonnes) soient croissantes de gauche à droite (resp. de haut en bas).

## Exemple

Le tableau 

1	2	5
3	6	7
4		

 est standard de forme  $(3, 3, 1)$ .

On note  $\text{std}(\lambda)$  le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ .

## Proposition

$$n! = \sum_{\lambda \text{ partition de } n} \text{std}(\lambda)^2$$

La **mesure de Plancherel** sur l'ensemble des partitions de  $n$  est définie par  $\text{Pl}_n(\lambda) := \frac{\text{std}(\lambda)^2}{n!}$ .

# Mesure de Plancherel pour $n = 4$

$$(4) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{Pl}_4 = \frac{1}{24}$$

---

$$(3, 1) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array} \quad \text{Pl}_4 = \frac{9}{24}$$

---

$$(2, 2) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{Pl}_4 = \frac{4}{24}$$

---

$$(2, 1, 1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \end{array} \quad \text{Pl}_4 = \frac{9}{24}$$

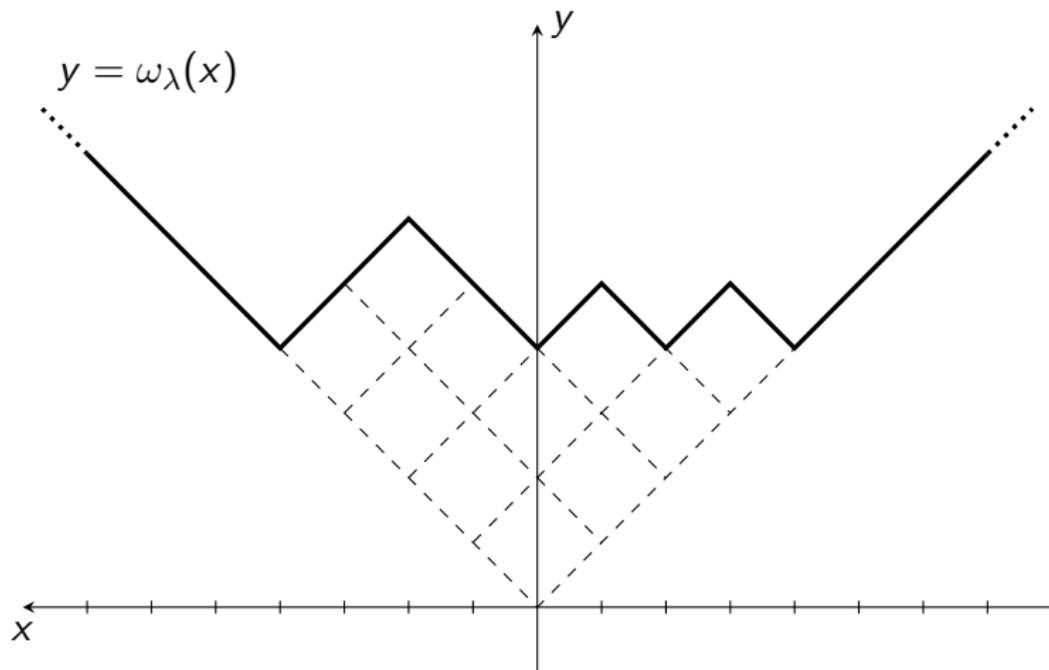
---

$$(1, 1, 1, 1) \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{Pl}_4 = \frac{1}{24}$$

- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - Rubans
  - Cœur
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

# Convention Russe

On tourne les diagrammes de Young de  $135^\circ$  et on regarde la fonction 1-lipschitzienne  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui correspond à la frontière supérieure. Par exemple, pour  $(4, 4, 2, 1)$  on obtient :



Soit  $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Omega(s) := \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( s \arcsin \left( \frac{s}{2} \right) + \sqrt{4 - s^2} \right), & \text{si } |s| \leq 2, \\ |s|, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème (Kerov–Vershik, Logan–Shepp, 1977)**

*Sous la mesure de Plancherel  $\text{Pl}_n$ , la fonction  $\tilde{\omega}_\lambda : s \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_\lambda(s\sqrt{n})$  converge uniformément en probabilité vers  $\Omega$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En d'autres termes, pour tout  $\epsilon > 0$  on a*

$$\text{Pl}_n \left( \sup_{\mathbb{R}} |\tilde{\omega}_\lambda - \Omega| > \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

# Forme limite universelle

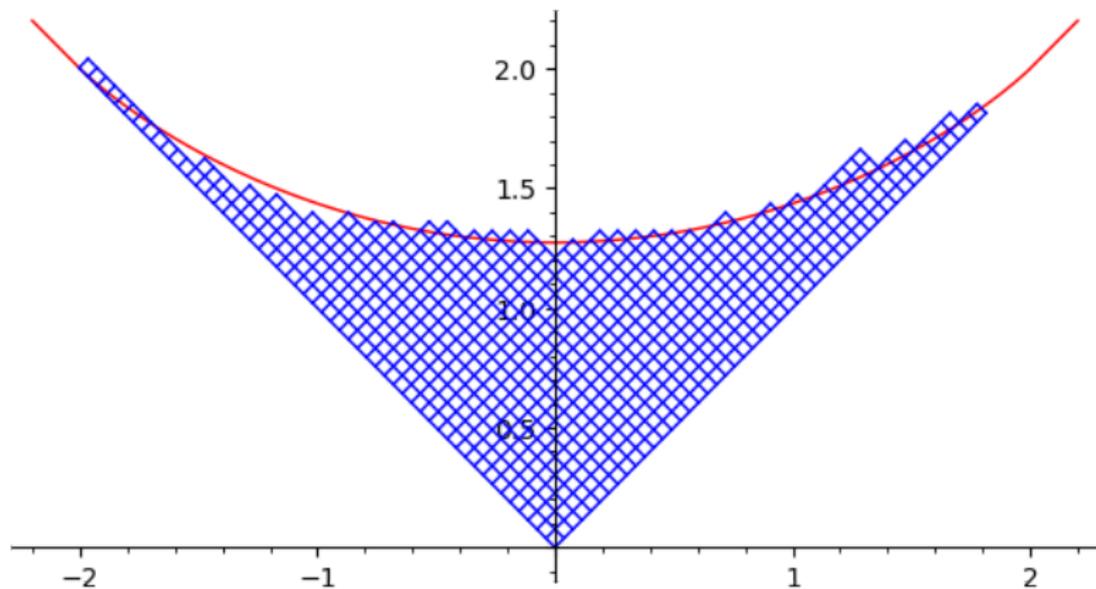


Figure – Représentation d'une partition de  $n = 700$  et de la forme limite.

- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
  
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - Rubans
  - Cœur
  
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

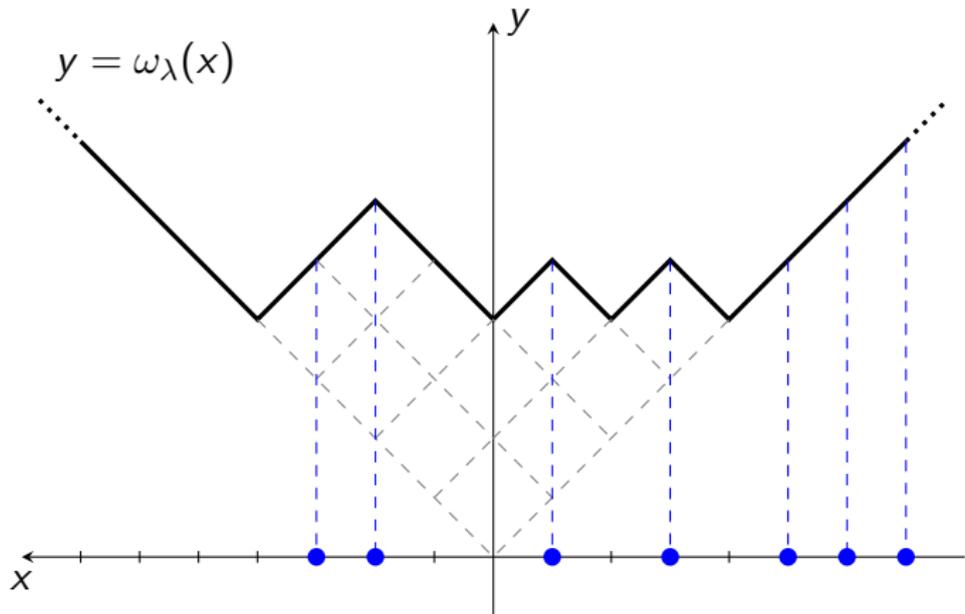
# Ensemble de descente

## Définition (Ensemble de descente)

L'ensemble de descente associé à une partition  $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$  est :

$$\mathcal{D}(\lambda) := \{\lambda_i - i : i \geq 1\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Par exemple,  $\mathcal{D}(4, 4, 2, 1) = \{3, 2, -1, -3, -5, -6, -7, \dots\}$ .



# Processus déterminantal

Soit  $t > 0$ .

Définition (Mesure de Plancherel poissonisé)

La mesure de Plancherel **poissonisée** sur **l'ensemble des partitions** est définie par, si  $\lambda$  est une partition de taille  $n$ ,

$$pl_t(\lambda) := \frac{\exp(-t)t^n}{n!} Pl_n(\lambda).$$

# Processus déterminantal

Soit  $t > 0$ .

## Définition (Mesure de Plancherel poissonisé)

La mesure de Plancherel **poissonisée** sur **l'ensemble des partitions** est définie par, si  $\lambda$  est une partition de taille  $n$ ,

$$\text{pl}_t(\lambda) := \frac{\exp(-t)t^n}{n!} \text{Pl}_n(\lambda).$$

Le **noyau de Bessel discret** est défini pour  $x, y \in \mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{J}^t(x, y) := \sqrt{t} \frac{J_x J_{y+1} - J_{x+1} J_y}{x - y} (2\sqrt{t}),$$

où  $J_x$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $x$ .

## Théorème (Borodin-Okounkov-Olshanski 2000)

Soient  $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{Z}$  distincts. On a :

$$\text{pl}_t(x_1, \dots, x_s \in \mathcal{D}(\lambda)) = \det[\mathcal{J}^t(x_a, x_b)]_{1 \leq a, b \leq s}. \quad (\diamond)$$

- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - **Rubans**
  - Cœur
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

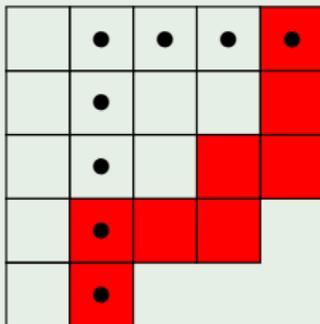
# Équerres et rubans

Soit  $\lambda$  une partition.

- Une **équerre** du diagramme de Young de  $\lambda$  est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée.
- Un **ruban** du diagramme de Young de  $\lambda$  est l'ensemble des boîtes de la frontière qui se trouvent entre les deux extrémités d'une équerre.

## Exemple

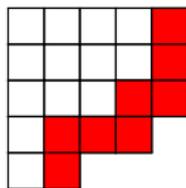
Une équerre et son ruban correspondant pour  $\lambda = (5, 5, 5, 4, 2)$  :



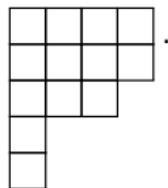
## Proposition

*Si on enlève un ruban d'un diagramme de Young alors on obtient encore un diagramme de Young.*

Sur l'exemple précédent, la partition

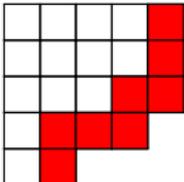
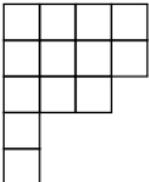


devient



## Proposition

*Si on enlève un ruban d'un diagramme de Young alors on obtient encore un diagramme de Young.*

Sur l'exemple précédent, la partition  devient .

## Observation

L'ensemble de descente initial :

$$\mathcal{D}(5, 5, 5, 4, 2) = \{4, 3, 2, 0, -3, -6, -7, \dots\},$$

devient :

$$\mathcal{D}(4, 4, 3, 1, 1) = \{3, 2, 0, -3, -4, -6, -7, \dots\}.$$

## Proposition

*Soient  $\lambda, \mu$  deux partitions. On peut passer du diagramme de Young de  $\lambda$  à celui de  $\mu$  en enlevant un ruban de taille  $e$  si et seulement si :*

$$\mathcal{D}(\mu) = (\mathcal{D}(\lambda) \setminus \{b\}) \cup \{b - e\},$$

*pour un certain  $b \in \mathcal{D}(\lambda)$  avec  $b - e \notin \mathcal{D}(\lambda)$ .*

# Correspondance entre rubans et décalages de billes

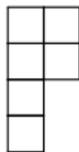
## Proposition

Soient  $\lambda, \mu$  deux partitions. On peut passer du diagramme de Young de  $\lambda$  à celui de  $\mu$  en enlevant un ruban de taille  $e$  si et seulement si :

$$\mathcal{D}(\mu) = (\mathcal{D}(\lambda) \setminus \{b\}) \cup \{b - e\},$$

pour un certain  $b \in \mathcal{D}(\lambda)$  avec  $b - e \notin \mathcal{D}(\lambda)$ .

Avec  $\lambda := (2, 2, 1, 1)$  on a  $\mathcal{D}(\lambda) = (1, 0, -2, -3, -5, -6, \dots)$  :



# Correspondance entre rubans et décalages de billes

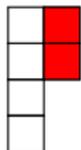
## Proposition

Soient  $\lambda, \mu$  deux partitions. On peut passer du diagramme de Young de  $\lambda$  à celui de  $\mu$  en enlevant un ruban de taille  $e$  si et seulement si :

$$\mathcal{D}(\mu) = (\mathcal{D}(\lambda) \setminus \{b\}) \cup \{b - e\},$$

pour un certain  $b \in \mathcal{D}(\lambda)$  avec  $b - e \notin \mathcal{D}(\lambda)$ .

Avec  $\lambda := (2, 2, 1, 1)$  on a  $\mathcal{D}(\lambda) = (1, 0, -2, -3, -5, -6, \dots)$  :



# Correspondance entre rubans et décalages de billes

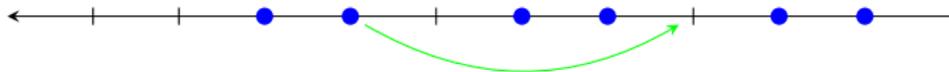
## Proposition

Soient  $\lambda, \mu$  deux partitions. On peut passer du diagramme de Young de  $\lambda$  à celui de  $\mu$  en enlevant un ruban de taille  $e$  si et seulement si :

$$\mathcal{D}(\mu) = (\mathcal{D}(\lambda) \setminus \{b\}) \cup \{b - e\},$$

pour un certain  $b \in \mathcal{D}(\lambda)$  avec  $b - e \notin \mathcal{D}(\lambda)$ .

Avec  $\lambda := (2, 2, 1, 1)$  on a  $\mathcal{D}(\lambda) = (1, 0, -2, -3, -5, -6, \dots)$  :



# Correspondance entre rubans et décalages de billes

## Proposition

Soient  $\lambda, \mu$  deux partitions. On peut passer du diagramme de Young de  $\lambda$  à celui de  $\mu$  en enlevant un ruban de taille  $e$  si et seulement si :

$$\mathcal{D}(\mu) = (\mathcal{D}(\lambda) \setminus \{b\}) \cup \{b - e\},$$

pour un certain  $b \in \mathcal{D}(\lambda)$  avec  $b - e \notin \mathcal{D}(\lambda)$ .

Avec  $\lambda := (2, 2, 1, 1)$  on a  $\mathcal{D}(\lambda) = (1, 0, -2, -3, -5, -6, \dots)$  :



# Correspondance entre rubans et décalages de billes

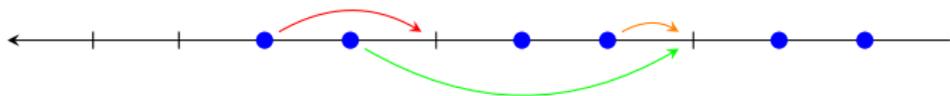
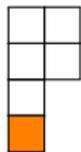
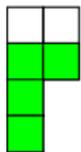
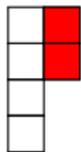
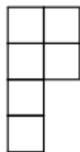
## Proposition

Soient  $\lambda, \mu$  deux partitions. On peut passer du diagramme de Young de  $\lambda$  à celui de  $\mu$  en enlevant un ruban de taille  $e$  si et seulement si :

$$\mathcal{D}(\mu) = (\mathcal{D}(\lambda) \setminus \{b\}) \cup \{b - e\},$$

pour un certain  $b \in \mathcal{D}(\lambda)$  avec  $b - e \notin \mathcal{D}(\lambda)$ .

Avec  $\lambda := (2, 2, 1, 1)$  on a  $\mathcal{D}(\lambda) = (1, 0, -2, -3, -5, -6, \dots)$  :



- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
  
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - Rubans
  - Cœur
  
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

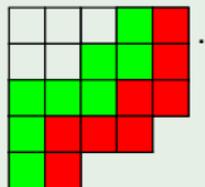
Soit  $\lambda$  une partition et  $e \geq 1$ .

## Définition (Cœur)

Le  $e$ -cœur de  $\lambda$  est la partition obtenue après avoir enlevé tous les rubans de taille  $e$  possibles du diagramme de Young de  $\lambda$ .

## Exemple

- Le 8-cœur de  $(5, 5, 5, 4, 2)$  est  $(3, 2)$  :



- Le 4-cœur de  $(3, 2, 2, 1)$  est la partition vide :



# Cœur d'une partition

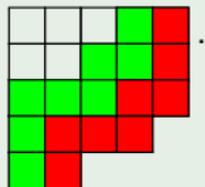
Soit  $\lambda$  une partition et  $e \geq 1$ .

## Définition (Cœur)

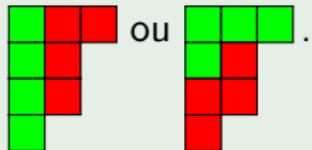
Le  $e$ -cœur de  $\lambda$  est la partition obtenue après avoir enlevé tous les rubans de taille  $e$  possibles du diagramme de Young de  $\lambda$ .

## Exemple

- Le 8-cœur de  $(5, 5, 5, 4, 2)$  est  $(3, 2)$  :



- Le 4-cœur de  $(3, 2, 2, 1)$  est la partition vide :



## Proposition

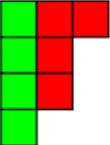
*Le  $e$ -cœur d'une partition  $\lambda$  est obtenu en poussant dans  $\mathcal{D}(\lambda)$  les billes d'une même classe de congruence modulo  $e$  le plus à droite possible.*

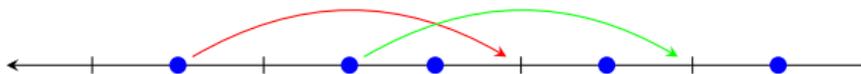
# Légitimité de la définition

## Proposition

*Le  $e$ -cœur d'une partition  $\lambda$  est obtenu en poussant dans  $\mathcal{D}(\lambda)$  les billes d'une même classe de congruence modulo  $e$  le plus à droite possible.*

Avec l'exemple  $\lambda = (3, 2, 2, 1)$  et  $e = 4$  précédent :

- l'ordre  correspond à :

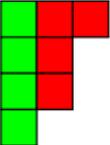


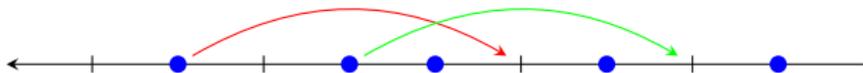
# Légitimité de la définition

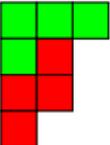
## Proposition

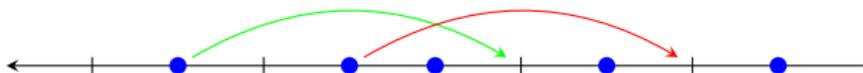
Le  $e$ -cœur d'une partition  $\lambda$  est obtenu en poussant dans  $\mathcal{D}(\lambda)$  les billes d'une même classe de congruence modulo  $e$  le plus à droite possible.

Avec l'exemple  $\lambda = (3, 2, 2, 1)$  et  $e = 4$  précédent :

- l'ordre  correspond à :



- l'ordre  correspond à :

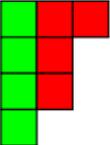


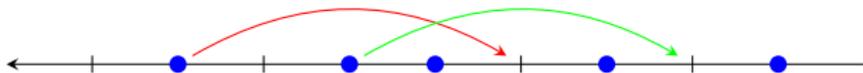
# Légitimité de la définition

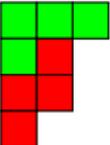
## Proposition

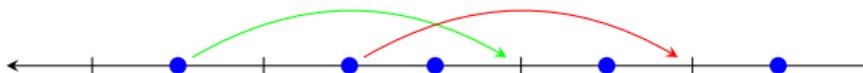
Le  $e$ -cœur d'une partition  $\lambda$  est obtenu en poussant dans  $\mathcal{D}(\lambda)$  les billes d'une même classe de congruence modulo  $e$  le plus à droite possible.

Avec l'exemple  $\lambda = (3, 2, 2, 1)$  et  $e = 4$  précédent :

- l'ordre  correspond à :



- l'ordre  correspond à :



le 4-cœur étant :



- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
  
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - Rubans
  - Cœur
  
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

# Présentation du problème

Sous la mesure de Plancherel, les partitions ont une forme limite universelle. Que dire du  $e$ -cœur pour de telles partitions ?

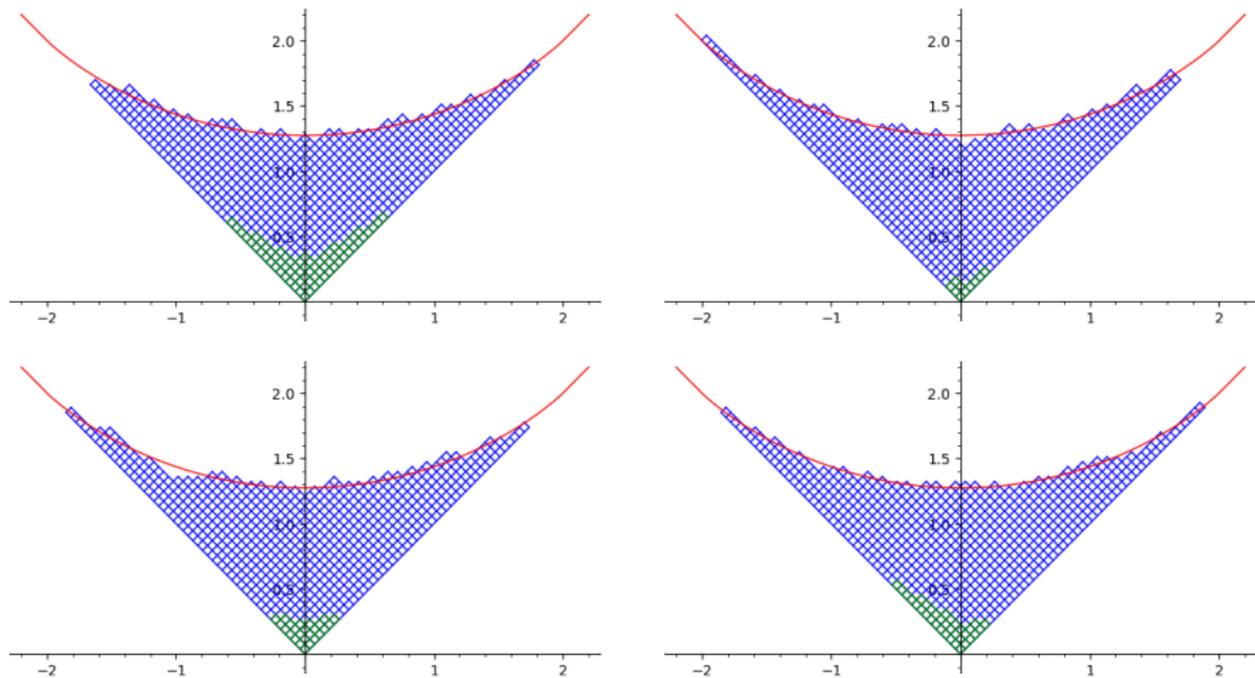


Figure – Quelques 5-cœurs (en vert) pour  $n = 700$ .

## Variables auxiliaires

On se propose d'étudier la taille du  $e$ -cœur des partitions tirées selon la mesure de Plancherel. Pour  $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ , on définit :

$$c_i(\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_\lambda(i + ke) - |i + ke| \in \mathbb{N}$$

(nombre de « boîtes de résidu  $i$  ») et :

$$x_i(\lambda) := c_i(\lambda) - c_{i+1}(\lambda) \in \mathbb{Z}.$$

# Variables auxiliaires

On se propose d'étudier la taille du  $e$ -cœur des partitions tirées selon la mesure de Plancherel. Pour  $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ , on définit :

$$c_i(\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_\lambda(i + ke) - |i + ke| \in \mathbb{N}$$

(nombre de « boîtes de résidu  $i$  ») et :

$$x_i(\lambda) := c_i(\lambda) - c_{i+1}(\lambda) \in \mathbb{Z}.$$

Proposition (Garvan-Kim-Stanton 1990, Fayers 2006)

*La taille  $\ell_e(\lambda)$  du  $e$ -cœur de  $\lambda$  est donnée par :*

$$\ell_e(\lambda) = \frac{e}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} x_i(\lambda)^2 + \sum_{i=0}^{e-1} ix_i(\lambda). \quad (\diamond)$$

# Variables auxiliaires

On se propose d'étudier la taille du  $e$ -cœur des partitions tirées selon la mesure de Plancherel. Pour  $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ , on définit :

$$c_i(\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_\lambda(i + ke) - |i + ke| \in \mathbb{N}$$

(nombre de « boîtes de résidu  $i$  ») et :

$$x_i(\lambda) := c_i(\lambda) - c_{i+1}(\lambda) \in \mathbb{Z}.$$

Proposition (Garvan-Kim-Stanton 1990, Fayers 2006)

*La taille  $\ell_e(\lambda)$  du  $e$ -cœur de  $\lambda$  est donnée par :*

$$\ell_e(\lambda) = \frac{e}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} x_i(\lambda)^2 + \sum_{i=0}^{e-1} ix_i(\lambda). \quad (\diamond)$$

Remarque

On peut montrer que  $x_i(\lambda) = x_i(\mu)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$  si et seulement si  $\lambda$  et  $\mu$  ont le même  $e$ -cœur.

## Proposition (R. 21)

Pour tout  $i \in \{0, \dots, e-1\}$  on a :

$$x_i(\lambda) := \#(e\mathbb{Z}_{\geq 0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda) - \#(e\mathbb{Z}_{< 0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda)^c.$$

## Proposition (R. 21)

Pour tout  $i \in \{0, \dots, e-1\}$  on a :

$$x_i(\lambda) := \#(e\mathbb{Z}_{\geq 0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda) - \#(e\mathbb{Z}_{< 0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda)^c.$$

## Proposition (R. 21)

Pour tout  $i \in \{0, \dots, e-1\}$  on a :

$$x_i(\lambda) = \#(e\mathbb{Z}_{\geq -t^2} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda) - t^2 + R(\lambda), \quad (\diamond)$$

où  $R(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{L^2} 0$ .

- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - Rubans
  - Cœur
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

# Théorème central limite

Pour  $i \in \{0, \dots, e-1\}$  on note :

$$\#_i := \#(e\mathbb{Z}_{\geq -t^2} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda),$$

et  $\mathbb{E}_t, \text{Var}_t$  l'espérance et la variance sous  $\text{pl}_t$ .

## Théorème (Costin–Lebowitz 1995)

Si  $\text{Var}_t \#_i \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$  alors :

$$\frac{\#_i - \mathbb{E}_t \#_i}{\sqrt{\text{Var}_t \#_i}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

# Théorème central limite

Pour  $i \in \{0, \dots, e-1\}$  on note :

$$\#_i := \#(e\mathbb{Z}_{\geq -t^2} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda),$$

et  $\mathbb{E}_t, \text{Var}_t$  l'espérance et la variance sous  $pl_t$ .

## Théorème (Costin–Lebowitz 1995)

Si  $\text{Var}_t \#_i \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$  alors :

$$\frac{\#_i - \mathbb{E}_t \#_i}{\sqrt{\text{Var}_t \#_i}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

- Le théorème s'énonce dans un cadre plus général.
- La convergence a lieu en moments.

## Proposition

On a :

$$\mathbb{E}_t x_i(\lambda) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0+i}} \mathcal{J}^t(m, m) - \sum_{n \in \mathbb{Z}_{< 0+i}} (1 - \mathcal{J}^t(n, n)),$$

et :

$$\text{Var}_t x_i(\lambda) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}_{+i} \\ n \notin \mathbb{Z}_{+i}}} \mathcal{J}^t(m, n)^2.$$

## Proposition

On a :

$$\mathbb{E}_t x_i(\lambda) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0+i}} \mathcal{J}^t(m, m) - \sum_{n \in \mathbb{Z}_{< 0+i}} (1 - \mathcal{J}^t(n, n)),$$

et :

$$\text{Var}_t x_i(\lambda) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}+i \\ n \notin \mathbb{Z}+i}} \mathcal{J}^t(m, n)^2.$$

## Théorème (R. 21)

Quand  $t \rightarrow +\infty$ , on a  $\mathbb{E}_t x_i(\lambda) = O(1)$  et :

$$\text{Var}_t x_i(\lambda) \sim \frac{4\sqrt{t}}{\pi e^2} \cot \frac{\pi}{2e}.$$

## Corollaire (R. 21)

*Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $\text{pl}_t$  on a :*

$$t^{-1/4} \chi_i(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{4}{\pi e^2} \cot \frac{\pi}{2e} \right).$$

## Corollaire (R. 21)

*Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :*

$$t^{-1/4} \chi_i(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{4}{\pi e^2} \cot \frac{\pi}{2e} \right).$$

## Corollaire (R. 21)

*Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :*

$$\mathbb{E}_t \ell_e(\lambda) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \cot \frac{\pi}{2e},$$

*quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

- 1 Mesure de Plancherel
  - Mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers
  - Loi des grands nombres
  
- 2 Cœur d'une partition
  - Ensemble de descente
  - Rubans
  - Cœur
  
- 3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel
  - Reformulation du problème
  - Loi de  $x_i(\lambda)$
  - Loi jointe des  $x_i(\lambda)$

# Théorème central limite multi-dimensionnel

On rappelle que  $\#_i := \#(e\mathbb{Z}_{\geq -t^2} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda)$ . On désigne par  $\text{Cov}_t$  la covariance sous  $\text{pl}_t$ .

## Théorème (Soshnikov 2000)

Si  $\text{Var}_t \#_i \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et s'il existe  $b_{ij} \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\frac{\text{Cov}_t(\#_i, \#_j)}{\sqrt{\text{Var}_t \#_i \text{Var}_t \#_j}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} b_{ij},$$

alors, avec  $B := (b_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}$ ,

$$\left( \frac{\#_i - \mathbb{E}_t \#_i}{\sqrt{\text{Var}_t \#_i}} \right)_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B).$$

- Le théorème s'énonce dans un cadre plus général.
- La convergence a lieu en moments.

## Proposition

Pour  $i \neq j$  on a :

$$\text{Cov}_t(x_i(\lambda), x_j(\lambda)) = - \sum_{m \in \mathbb{Z}+i} \sum_{n \in \mathbb{Z}+j} \mathcal{J}^t(m, n)^2.$$

## Théorème (R. 21)

Pour  $i \neq j$  on a :

$$\text{Cov}_t(x_i(\lambda), x_j(\lambda)) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi e^2} \left[ \cot\left(j - i + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{e} - \cot\left(j - i - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{e} \right],$$

quand  $t \rightarrow +\infty$ .

## Proposition

Pour  $i \neq j$  on a :

$$\text{Cov}_t(x_i(\lambda), x_j(\lambda)) = - \sum_{m \in e\mathbb{Z}+i} \sum_{n \in e\mathbb{Z}+j} \mathcal{J}^t(m, n)^2.$$

## Théorème (R. 21)

Pour  $i \neq j$  on a :

$$\text{Cov}_t(x_i(\lambda), x_j(\lambda)) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi e^2} \left[ \cot\left(j - i + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{e} - \cot\left(j - i - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{e} \right],$$

quand  $t \rightarrow +\infty$ .

En rappelant que  $\text{Var}_t x_i(\lambda) \sim_t \frac{4\sqrt{t}}{\pi e^2} \cot \frac{\pi}{2e}$ , on remarque que le résultat précédent reste vrai pour  $i = j$ .

## Corollaire (R. 21)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :

$$e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{x_i(\lambda)}{t^{1/4}} \right)_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B),$$

où  $B = (b_{ij})$  avec  $b_{ij} := \cot(j - i + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{e} - \cot(j - i - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{e}$ .

## Corollaire (R. 21)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :

$$e\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{x_i(\lambda)}{t^{1/4}} \right)_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B),$$

où  $B = (b_{ij})$  avec  $b_{ij} := \cot(j - i + \frac{1}{2})\frac{\pi}{e} - \cot(j - i - \frac{1}{2})\frac{\pi}{e}$ .

## Corollaire (R. 21)

Si  $\mu_0, \dots, \mu_{e-1}$  sont les valeurs propres de  $B$  alors :

$$\frac{e\pi}{2\sqrt{t}} \ell_e(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=0}^{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \mu_i\right).$$

## Corollaire (R. 21)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :

$$e\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{x_i(\lambda)}{t^{1/4}} \right)_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B),$$

où  $B = (b_{ij})$  avec  $b_{ij} := \cot(j - i + \frac{1}{2})\frac{\pi}{e} - \cot(j - i - \frac{1}{2})\frac{\pi}{e}$ .

## Corollaire (R. 21)

Si  $\mu_0, \dots, \mu_{e-1}$  sont les valeurs propres de  $B$  alors :

$$\frac{e\pi}{2\sqrt{t}} \ell_e(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=0}^{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \mu_i\right).$$

## Proposition (R. 21)

Pour tout  $k \in \{0, \dots, e-1\}$  on a  $\mu_k = 2e \sin \frac{k\pi}{e}$ .

## Théorème (R. 21, résultat principal)

*Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :*

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}} \ell_e(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sin \frac{k\pi}{e}\right)$$

*(somme de variables mutuellement indépendantes).*

# Conclusion

## Théorème (R. 21, résultat principal)

*Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :*

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}} l_e(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sin \frac{k\pi}{e}\right)$$

*(somme de variables mutuellement indépendantes).*

## Corollaire (R. 21)

*Quand  $t \rightarrow +\infty$  on a  $\mathbb{E}_t l_e(\lambda) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \cot \frac{\pi}{2e}$  et  $\text{Var}_t l_e(\lambda) \sim \frac{4et}{\pi^2}$ .*

# Conclusion

## Théorème (R. 21, résultat principal)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}} l_e(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sin \frac{k\pi}{e}\right)$$

(somme de variables mutuellement indépendantes).

## Corollaire (R. 21)

Quand  $t \rightarrow +\infty$  on a  $\mathbb{E}_t l_e(\lambda) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \cot \frac{\pi}{2e}$  et  $\text{Var}_t l_e(\lambda) \sim \frac{4et}{\pi^2}$ .

- Les convergences ont vraisemblablement lieu pour la mesure de Plancherel  $Pl_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (« dé-poissonisation »).

# Conclusion

## Théorème (R. 21, résultat principal)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée  $pl_t$  on a :

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}} \ell_e(\lambda) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sin \frac{k\pi}{e}\right)$$

(somme de variables mutuellement indépendantes).

## Corollaire (R. 21)

Quand  $t \rightarrow +\infty$  on a  $\mathbb{E}_t \ell_e(\lambda) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \cot \frac{\pi}{2e}$  et  $\text{Var}_t \ell_e(\lambda) \sim \frac{4et}{\pi^2}$ .

- Les convergences ont vraisemblablement lieu pour la mesure de Plancherel  $Pl_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (« dé-poissonisation »).
- Lulov–Pittel (1999) et Ayyer–Sinha (2020) ont montré que sous la mesure **uniforme** sur les partitions de  $n$  on a

$$\frac{\pi}{\sqrt{n}} \ell_e(\lambda) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \Gamma\left(\frac{e-1}{2}, \sqrt{6}\right).$$

# En images

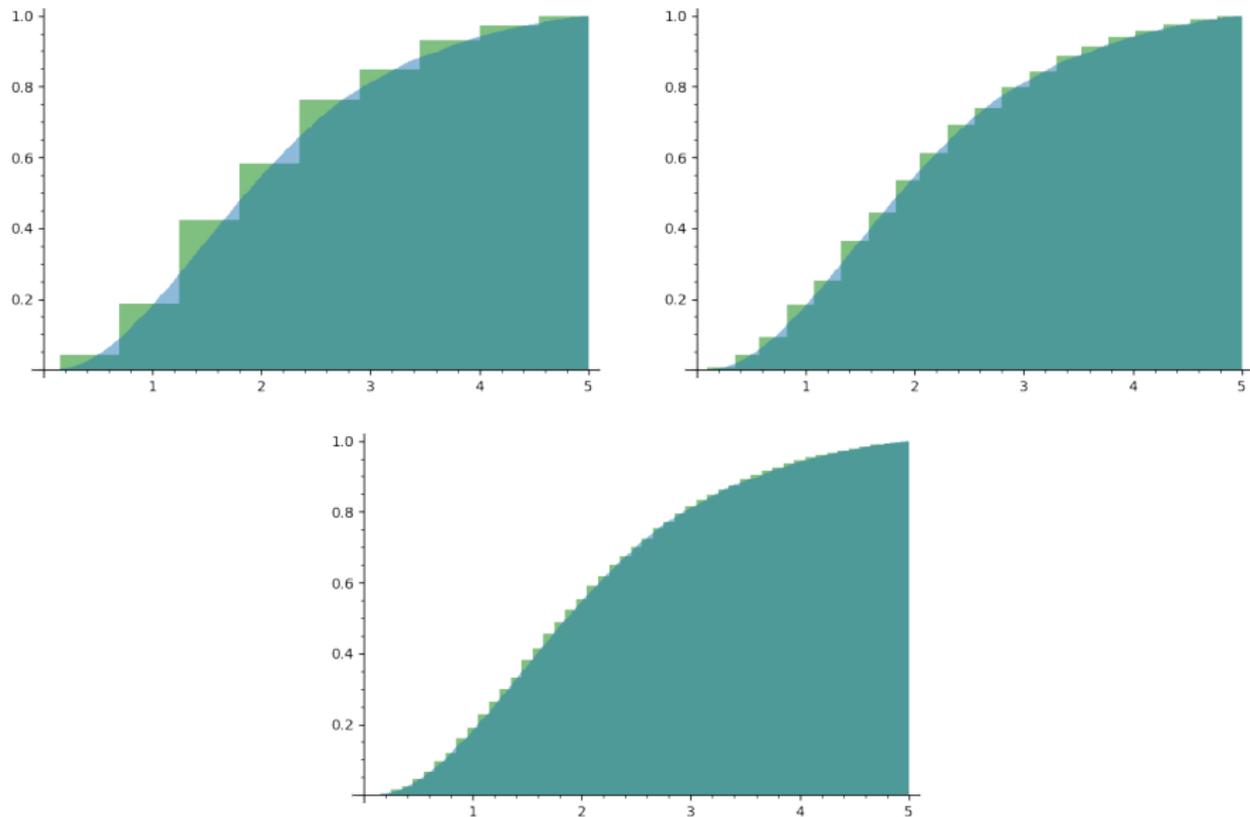
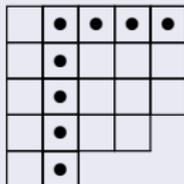


Figure – Convergence en loi de  $\frac{\pi}{4\sqrt{n}}\ell_e(\lambda)$  vers  $\sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sin \frac{k\pi}{e}\right)$  pour  $e = 7$  et  $n = 100, 500, 3000$ .

a	t	t	e	n	t	i	o	n
M	e	r	c	i				
v	o	t	r	e				
d	e							
!								

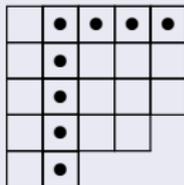
## Rappel

- La mesure de Plancherel est donnée par  $P1_n(\lambda) = \frac{\text{std}(\lambda)^2}{n!}$  où  $\text{std}(\lambda)$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ .
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée



## Rappel

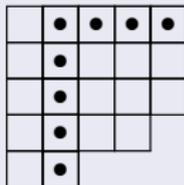
- La mesure de Plancherel est donnée par  $P1_n(\lambda) = \frac{\text{std}(\lambda)^2}{n!}$  où  $\text{std}(\lambda)$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ .
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée



- Un tableau pris uniformément est standard ssi chaque boîte  $b$  possède l'étiquette minimale dans son équerre  $\rightsquigarrow$  probabilité  $\frac{1}{h(b)}$  si l'équerre possède  $h(b)$  boîtes.

## Rappel

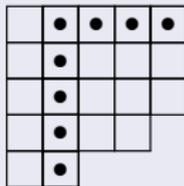
- La mesure de Plancherel est donnée par  $Pl_n(\lambda) = \frac{\text{std}(\lambda)^2}{n!}$  où  $\text{std}(\lambda)$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ .
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée



- Un tableau pris uniformément est standard ssi chaque boîte  $b$  possède l'étiquette minimale dans son équerre  $\rightsquigarrow$  probabilité  $\frac{1}{h(b)}$  si l'équerre possède  $h(b)$  boîtes.
- On en « déduit » que la probabilité d'être standard est  $\frac{1}{\prod_b h(b)}$ , où  $b$  parcourt l'ensemble des boîtes du diagramme de Young.

## Rappel

- La mesure de Plancherel est donnée par  $Pl_n(\lambda) = \frac{\text{std}(\lambda)^2}{n!}$  où  $\text{std}(\lambda)$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ .
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée



- Un tableau pris uniformément est standard ssi chaque boîte  $b$  possède l'étiquette minimale dans son équerre  $\rightsquigarrow$  probabilité  $\frac{1}{h(b)}$  si l'équerre possède  $h(b)$  boîtes.
- On en « déduit » que la probabilité d'être standard est  $\frac{1}{\prod_b h(b)}$ , où  $b$  parcourt l'ensemble des boîtes du diagramme de Young.
- Ainsi  $\text{std}(\lambda) = \frac{n!}{\prod_b h(b)}$  et  $Pl_n(\lambda) = \frac{n!}{\prod_b h(b)^2}$ .