Taille du cœur des partitions sous la mesure de Plancherel

Salim Rostam

Univ Rennes

03 janvier 2022

Séminaire de probabilités, IRMAR

1 Mesure de Plancherel

2 Cœur d'une partition

3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel

Partitions

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Une partition de (taille) n est une suite $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h > 0)$ d'entiers positifs décroissants de somme n.

Exemple

Les partitions de 5 sont (5), $(4,1)$, $(3,2)$, $(3,1,1)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$.

Partitions

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition

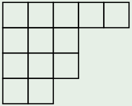
Une partition de (taille) n est une suite $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h > 0)$ d'entiers positifs décroissants de somme n.

Exemple

Les partitions de 5 sont (5), $(4,1)$, $(3,2)$, $(3,1,1)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$.

On peut représenter une partition à l'aide de son diagramme de Young.

Exemple

Le diagramme de Young de la partition $(5,3,3,2)$ est .

Mesure de Plancherel

Soit λ une partition de n. Un tableau standard de forme λ est une numérotation des cases du diagramme de Young de λ par les entiers de 1 à n de sorte que les lignes (resp. les colonnes) soient croissantes de gauche à droite (resp. de haut en bas).

Exemple

Le tableau $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$ est standard de forme $(3, 3, 1)$.

On note $\mathrm{std}(\lambda)$ le nombre de tableaux standards de forme λ.

Mesure de Plancherel

Soit λ une partition de n. Un tableau standard de forme λ est une numérotation des cases du diagramme de Young de λ par les entiers de 1 à n de sorte que les lignes (resp. les colonnes) soient croissantes de gauche à droite (resp. de haut en bas).

Exemple

Le tableau $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$ est standard de forme $(3, 3, 1)$.

On note $\mathrm{std}(\lambda)$ le nombre de tableaux standards de forme λ.

Proposition

$$n! = \sum_{\lambda \text{ partition de } n} \mathrm{std}(\lambda)^2$$

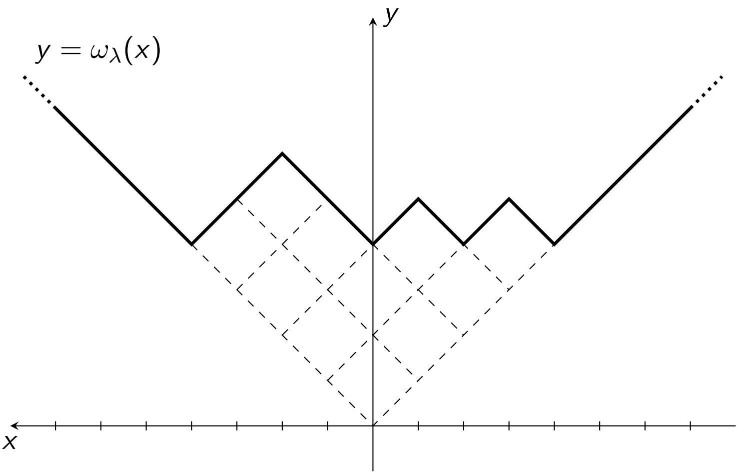
La mesure de Plancherel sur l'ensemble des partitions de n est définie par $\mathrm{Pl}_n(\lambda) := \frac{\mathrm{std}(\lambda)^2}{n!}$.

Mesure de Plancherel pour $n = 4$

(4)	$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 \end{ytableau}$	$\mathrm{Pl}_4 = \frac{1}{24}$
$(3,1)$	$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{ytableau}$	$\mathrm{Pl}_4 = \frac{9}{24}$
$(2,2)$	$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{ytableau}$	$\mathrm{Pl}_4 = \frac{4}{24}$
$(2,1,1)$	$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 4 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau}$	$\mathrm{Pl}_4 = \frac{9}{24}$
$(1,1,1,1)$	$\begin{ytableau} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{ytableau}$	$\mathrm{Pl}_4 = \frac{1}{24}$

Convention Russe

On tourne les diagrammes de Young de 135° et on regarde la fonction 1-lipschitzienne $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui correspond à la frontière supérieure. Par exemple, pour $(4, 4, 2, 1)$ on obtient :



Forme limite universelle

Soit $\Omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Omega(s) := \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(s \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) + \sqrt{4 - s^2}\right), & \text{si } |s| \leq 2, \\ |s|, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème (Kerov–Vershik, Logan–Shepp, 1977)

Sous la mesure de Plancherel Pl_n*, la fonction* $\widetilde{\omega}_\lambda : s \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}\omega_\lambda(s\sqrt{n})$ *converge uniformément en probabilité vers* Ω *quand* $n \to +\infty$*. En d'autres termes, pour tout* $\epsilon > 0$ *on a*

$$\mathrm{Pl}_n\left(\sup_{\mathbb{R}} |\widetilde{\omega}_\lambda - \Omega| > \epsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Forme limite universelle

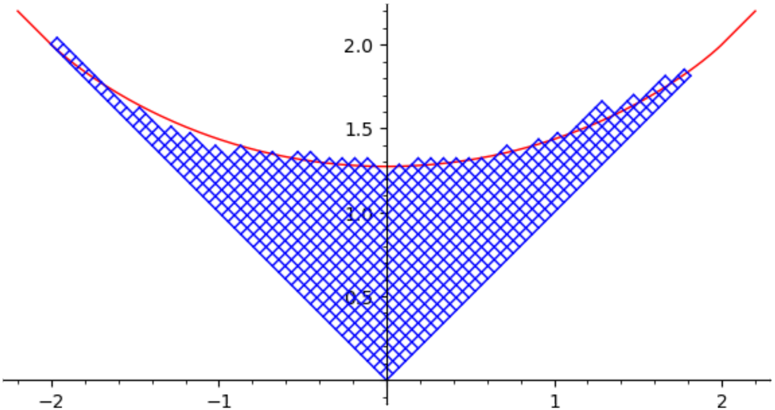


Figure – Représentation d'une partition de $n = 700$ et de la forme limite.

1 Mesure de Plancherel

2 Cœur d'une partition

3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel

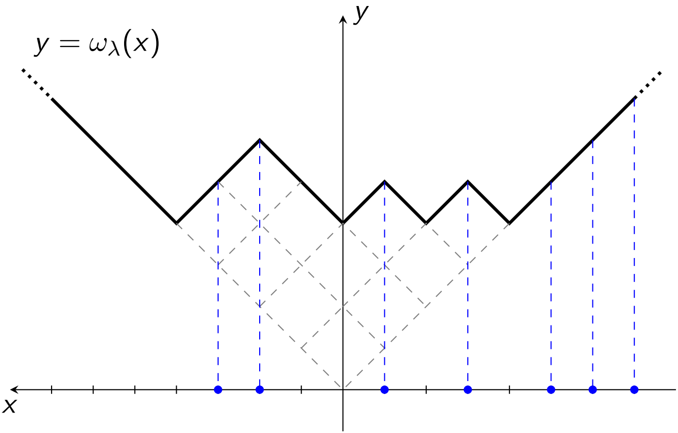
Ensemble de descente

Définition (Ensemble de descente)

L'ensemble de descente associé à la partition $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ est

$$\mathcal{D}(\lambda) \coloneqq \{\lambda_i - i : i \geq 1\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Par exemple, $\mathcal{D}(4,4,2,1) = \{3, 2, -1, -3, -5, -6, -7, \dots\}$.



Processus déterminantal

Soit $t > 0$.

Définition (Mesure de Plancherel poissonisé)

La mesure de Plancherel poissonisée sur **l'ensemble des partitions** est définie par, si λ est une partition de taille n,

$$\mathrm{pl}_t(\lambda) := \frac{\exp(-t)t^n}{n!}\mathrm{Pl}_n(\lambda).$$

Processus déterminantal

Soit $t > 0$.

Définition (Mesure de Plancherel poissonisé)

La mesure de Plancherel poissonisée sur **l'ensemble des partitions** est définie par, si λ est une partition de taille n,

$$\mathrm{pl}_t(\lambda) := \frac{\exp(-t)t^n}{n!}\mathrm{Pl}_n(\lambda).$$

Le noyau de Bessel discret est défini pour $x, y \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{J}^t(x,y) := \sqrt{t}\frac{J_x J_{y+1} - J_{x+1}J_y}{x-y}(2\sqrt{t}),$$

où J_x est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre x.

Théorème (Borodin-Okounkov-Olshanski 2000)

Soient $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{Z}$ distincts. On a

$$\mathrm{pl}_t(x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{D}(\lambda)) = \det\left[\mathcal{J}^t(x_a, x_b)\right]_{1 \leq a,b \leq s}.$$

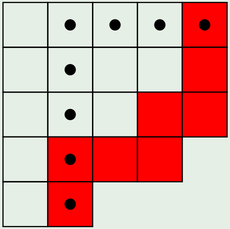
Équerres et rubans

Soit λ une partition.

- Une équerre du diagramme de Young de λ est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée.
- Un ruban du diagramme de Young de λ est l'ensemble des boîtes de la frontière qui se trouvent entre les deux extrémités d'une équerre.

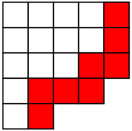
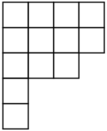
Exemple

Une équerre et son ruban correspondant :



Proposition

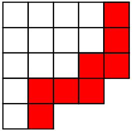
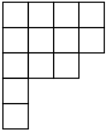
Si on enlève un ruban d'un diagramme de Young alors on obtient encore un diagramme de Young.

Sur l'exemple précédent, la partition  devient .

Lien avec l'ensemble de descente

Proposition

Si on enlève un ruban d'un diagramme de Young alors on obtient encore un diagramme de Young.

Sur l'exemple précédent, la partition  devient .

Proposition

Soient λ, μ deux partitions. On peut passer du diagramme de Young de λ à celui de μ en enlevant un ruban de taille e si et seulement si $\mathcal{D}(\mu) = (\mathcal{D}(\lambda) \setminus \{b\}) \cup \{b - e\}$ pour un certain $b \in \mathcal{D}(\lambda)$ avec $b - e \notin \mathcal{D}(\lambda)$.

Sur l'exemple précédent, l'ensemble de descente

$$\mathcal{D}(5,5,5,4,2) = \{4, 3, 2, 0, -3, -6, -7, \dots\},$$

devient

$$\mathcal{D}(4,4,3,1,1) = \{3, 2, 0, -3, -4, -6, -7, \dots\}.$$

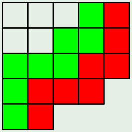
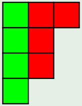
Cœur d'une partition

Soit λ une partition et $e \geq 1$.

Définition (Cœur)

Le *e-cœur* de λ est la partition obtenue après avoir enlevé tous les rubans de taille e possibles du diagramme de Young de λ.

Exemple

- Le 8-cœur de $(5, 5, 5, 4, 2)$ est $(3, 2)$:  .
- Le 4-cœur de $(3, 2, 2, 1)$ est la partition vide : 

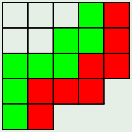
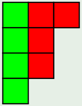
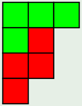
Cœur d'une partition

Soit λ une partition et $e \geq 1$.

Définition (Cœur)

Le *e-cœur* de λ est la partition obtenue après avoir enlevé tous les rubans de taille e possibles du diagramme de Young de λ.

Exemple

- Le 8-cœur de $(5, 5, 5, 4, 2)$ est $(3, 2)$:  .
- Le 4-cœur de $(3, 2, 2, 1)$ est la partition vide :  ou  .

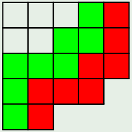
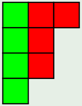
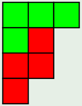
Cœur d'une partition

Soit λ une partition et $e \geq 1$.

Définition (Cœur)

Le *e*-cœur de λ est la partition obtenue après avoir enlevé tous les rubans de taille e possibles du diagramme de Young de λ.

Exemple

- Le 8-cœur de $(5,5,5,4,2)$ est $(3,2)$:  .
- Le 4-cœur de $(3,2,2,1)$ est la partition vide :  ou  .

Le lien avec $\mathcal{D}(\lambda)$ montre que l'ordre dans lequel on enlève les rubans n'importe pas.

1 Mesure de Plancherel

2 Cœur d'une partition

3 Asymptotique du cœur sous la mesure de Plancherel

Présentation du problème

Sous la mesure de Plancherel, les partitions ont une forme limite universelle. Que dire du e-cœur pour de telles partitions ?

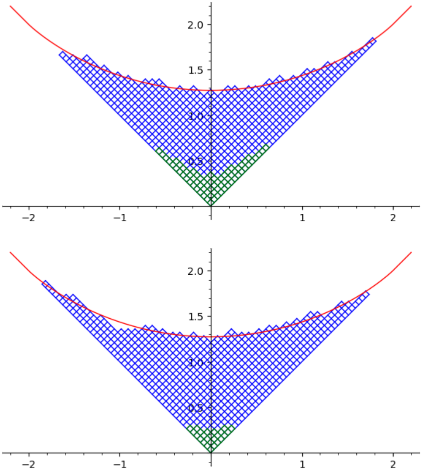


Figure – Quelques 5-cœurs (en vert) pour $n = 700$.

Variables auxiliaires

On se propose d'étudier la taille du e-cœur des partitions tirées selon la mesure de Plancherel. Pour $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, on définit

$$c_i(\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_\lambda(i + ke) - |i + ke| \in \mathbb{N}$$

(nombre de « boîtes de résidu i ») et

$$x_i(\lambda) := c_i(\lambda) - c_{i+1}(\lambda).$$

Variables auxiliaires

On se propose d'étudier la taille du e-cœur des partitions tirées selon la mesure de Plancherel. Pour $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, on définit

$$c_i(\lambda) \coloneqq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_\lambda(i + ke) - |i + ke| \in \mathbb{N}$$

(nombre de « boîtes de résidu i ») et

$$x_i(\lambda) \coloneqq c_i(\lambda) - c_{i+1}(\lambda).$$

Proposition (Garvan-Kim-Stanton 1990, Fayers 2006)

La taille $\ell_e(\lambda)$ du e-cœur de λ est donnée par

$$\ell_e(\lambda) = \frac{e}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} x_i(\lambda)^2 + \sum_{i=0}^{e-1} i x_i(\lambda).$$

Expression en fonction du processus de descente

Proposition (R. 21)

Pour tout $i \in \{0, \dots, e-1\}$ *on a*

$$x_i(\lambda) \coloneqq \#(e\mathbb{Z}_{\geq 0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda) - \#(e\mathbb{Z}_{<0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda)^c.$$

Expression en fonction du processus de descente

Proposition (R. 21)

Pour tout $i \in \{0, \dots, e-1\}$ *on a*

$$x_i(\lambda) := \#(e\mathbb{Z}_{\geq 0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda) - \#(e\mathbb{Z}_{<0} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda)^c.$$

Proposition (R. 21)

Pour $i \in \{0, \dots, e-1\}$ *on a*

$$x_i(\lambda) = \#(e\mathbb{Z}_{\geq -t^2} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda) - t^2 + R(\lambda),$$

où $R(\lambda) \xrightarrow[t \to +\infty]{\mathrm{L}^2} 0.$

Théorème central limite

Pour $i \in \{0, \dots, e-1\}$ on note $\#_i := \#(e\mathbb{Z}_{\geq -t^2} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda)$ et $\mathbb{E}_t, \mathrm{Var}_t, \mathrm{Cov}_t$ l'espérance, la variance et la covariance sous pl_t.

Théorème (Costin–Lebowitz 1995, Soshnikov 2000)

Si $\mathrm{Var}_t \#_i \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ *et s'il existe* $b_{ij} \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{\mathrm{Cov}_t(\#_i, \#_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}_t \#_i \, \mathrm{Var}_t \#_j}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} b_{ij},$$

alors, avec $B := (b_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}$,

$$\left(\frac{\#_i - \mathbb{E}_t \#_i}{\sqrt{\mathrm{Var}_t \#_i}} \right)_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B).$$

Théorème central limite

Pour $i \in \{0, \dots, e-1\}$ on note $\#_i := \#(e\mathbb{Z}_{\geq -t^2} + i) \cap \mathcal{D}(\lambda)$ et $\mathbb{E}_t, \mathrm{Var}_t, \mathrm{Cov}_t$ l'espérance, la variance et la covariance sous pl_t.

Théorème (Costin–Lebowitz 1995, Soshnikov 2000)

Si $\mathrm{Var}_t \#_i \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ *et s'il existe* $b_{ij} \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{\mathrm{Cov}_t(\#_i, \#_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}_t \#_i \, \mathrm{Var}_t \#_j}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} b_{ij},$$

alors, avec $B := (b_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}$,

$$\left(\frac{\#_i - \mathbb{E}_t \#_i}{\sqrt{\mathrm{Var}_t \#_i}}\right)_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B).$$

- Le théorème s'énonce dans un cadre plus général.
- La convergence a lieu en moments.

Espérance, covariance

Proposition

Avec $\rho^t(m) := \mathcal{J}^t(m,m)$ *on a*

$$\mathbb{E}_t x_i(\lambda) = \sum_{m \in e\mathbb{Z}_{\geq 0}+i} \rho^t(m) - \sum_{n \in e\mathbb{Z}_{<0}+i} (1-\rho^t(n)),$$

et, pour $i \neq j$*,*

$$\mathrm{Cov}_t(x_i(\lambda), x_j(\lambda)) = -\sum_{m \in e\mathbb{Z}+i} \sum_{n \in e\mathbb{Z}+j} \mathcal{J}^t(m,n)^2.$$

Espérance, covariance

Proposition

Avec $\rho^t(m) := \mathcal{J}^t(m,m)$ *on a*

$$\mathbb{E}_t x_i(\lambda) = \sum_{m \in e\mathbb{Z}_{\geq 0}+i} \rho^t(m) - \sum_{n \in e\mathbb{Z}_{<0}+i} (1-\rho^t(n)),$$

et, pour $i \neq j$,

$$\mathrm{Cov}_t(x_i(\lambda), x_j(\lambda)) = -\sum_{m \in e\mathbb{Z}+i} \sum_{n \in e\mathbb{Z}+j} \mathcal{J}^t(m,n)^2.$$

Théorème (R. 21)

Quand $t \to +\infty$, *on a* $\mathbb{E}_t x_i(\lambda) = O(1)$ *et*

$$\mathrm{Cov}_t(x_i(\lambda), x_j(\lambda)) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi e^2}\left[\cot\left(j-i+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{e} - \cot\left(j-i-\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{e}\right].$$

On a notamment $\mathrm{Var}_t\, x_i(\lambda) \sim \frac{4\sqrt{t}}{\pi e^2} \cot \frac{\pi}{2e}$ quand $t \to +\infty$.

Loi de la longueur du cœur

Corollaire (R. 21)

$$e\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x_i(\lambda)}{t^{1/4}}\right)_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,B),$$

où $B = (b_{ij})$ *avec* $b_{ij} := \cot\big(j - i + \frac{1}{2}\big)\frac{\pi}{e} - \cot\big(j - i - \frac{1}{2}\big)\frac{\pi}{e}$.

Loi de la longueur du cœur

Corollaire (R. 21)

$$e\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x_i(\lambda)}{t^{1/4}}\right)_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,B),$$

où $B=(b_{ij})$ *avec* $b_{ij} := \cot\left(j-i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{e} - \cot\left(j-i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{e}$.

On rappelle que $\ell_e(\lambda) = \frac{e}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} x_i(\lambda)^2 + \sum_{i=0}^{e-1} i x_i(\lambda)$.

Corollaire (R. 21)

Si $\lambda_0,\dots,\lambda_{e-1}$ *sont les valeurs propres de* B *alors*

$$\frac{e\pi}{2\sqrt{t}}\ell_e(\lambda) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=0}^{e-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2},\lambda_i\right).$$

Loi de la longueur du cœur

Corollaire (R. 21)

$$e\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x_i(\lambda)}{t^{1/4}}\right)_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,B),$$

où $B=(b_{ij})$ *avec* $b_{ij} := \cot\left(j-i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{e} - \cot\left(j-i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{e}$.

On rappelle que $\ell_e(\lambda) = \frac{e}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} x_i(\lambda)^2 + \sum_{i=0}^{e-1} i x_i(\lambda)$.

Corollaire (R. 21)

Si $\lambda_0,\dots,\lambda_{e-1}$ *sont les valeurs propres de* B *alors*

$$\frac{e\pi}{2\sqrt{t}}\ell_e(\lambda) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=0}^{e-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2},\lambda_i\right).$$

Proposition (R. 21)

Pour tout $k\in\{0,\dots,e-1\}$ *on a* $\lambda_k = 2e\sin\frac{k\pi}{e}$.

Conclusion

Théorème (R. 21)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée pl_t *on a*

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}}\ell_e(\lambda) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \sin\tfrac{k\pi}{e}\right)$$

(somme de variables mutuellement indépendantes).

Conclusion

Théorème (R. 21)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée pl_t *on a*

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}}\ell_e(\lambda) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \sin\tfrac{k\pi}{e}\right)$$

(somme de variables mutuellement indépendantes).

Corollaire (R. 21)

Quand $t \to +\infty$ *on a* $\mathbb{E}_t \ell_e(\lambda) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \cot \frac{\pi}{2e}$ *et* $\mathrm{Var}_t\, \ell_e(\lambda) \sim \frac{4et}{\pi^2}$.

Conclusion

Théorème (R. 21)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée pl_t *on a*

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}}\ell_e(\lambda) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \sin\tfrac{k\pi}{e}\right)$$

(somme de variables mutuellement indépendantes).

Corollaire (R. 21)

Quand $t \to +\infty$ *on a* $\mathbb{E}_t \ell_e(\lambda) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi}\cot\frac{\pi}{2e}$ *et* $\mathrm{Var}_t\, \ell_e(\lambda) \sim \frac{4et}{\pi^2}$.

- Les convergences ont vraisemblablement lieu pour la mesure de Plancherel Pl_n quand $n \to +\infty$ (« dé-poissonisation »).

Conclusion

Théorème (R. 21)

Sous la mesure de Plancherel poissonisée pl_t *on a*

$$\frac{\pi}{4\sqrt{t}}\ell_e(\lambda) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{e-1} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \sin\tfrac{k\pi}{e}\right)$$

(somme de variables mutuellement indépendantes).

Corollaire (R. 21)

Quand $t \to +\infty$ *on a* $\mathbb{E}_t \ell_e(\lambda) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\pi}\cot\frac{\pi}{2e}$ *et* $\mathrm{Var}_t\, \ell_e(\lambda) \sim \frac{4et}{\pi^2}$.

- Les convergences ont vraisemblablement lieu pour la mesure de Plancherel Pl_n quand $n \to +\infty$ (« dé-poissonisation »).
- Lulov–Pittel (1999) et Ayyer–Sinha (2020) ont montré que sous la mesure uniforme sur les partitions de n on a

$$\frac{\pi}{\sqrt{n}}\ell_e(\lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \Gamma\left(\tfrac{e-1}{2}, \sqrt{6}\right).$$

En images

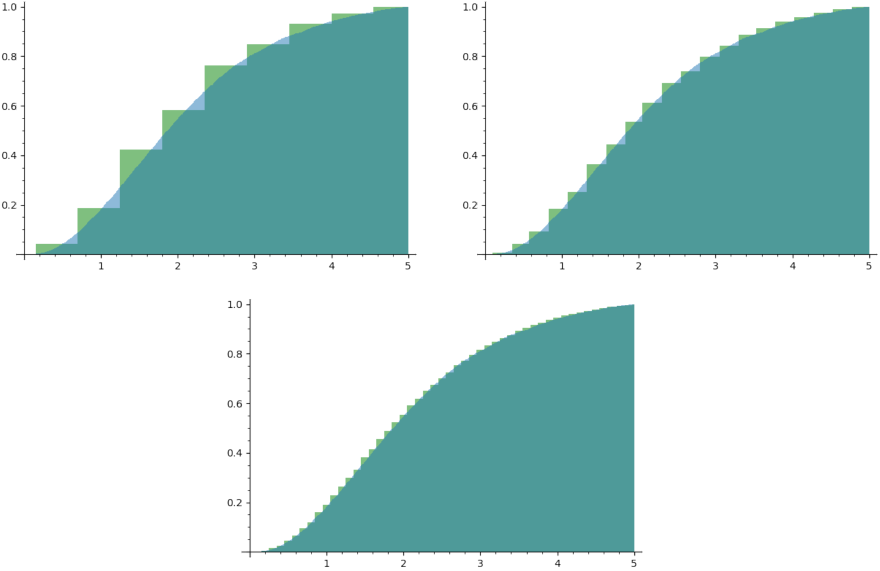


Figure – Convergence en loi de $\frac{\pi}{4\sqrt{n}}\ell_e(\lambda)$ vers $\sum_{k=1}^{e-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sin\frac{k\pi}{e}\right)$ pour $e = 7$ et $n = 100, 500, 3000$.

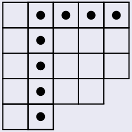
Fin

a	t	t	e	n	t	i	o	n
M	e	r	c	i				
v	o	t	r	e				
d	e							
!								

Bonus : formule des équerres

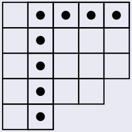
Rappel

- La mesure de Plancherel est donnée par $\mathrm{Pl}_n(\lambda) = \frac{\mathrm{std}(\lambda)^2}{n!}$ où $\mathrm{std}(\lambda)$ est le nombre de tableaux standards de forme λ.
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée



Bonus : formule des équerres

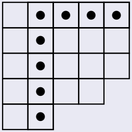
Rappel

- La mesure de Plancherel est donnée par $\mathrm{Pl}_n(\lambda) = \frac{\mathrm{std}(\lambda)^2}{n!}$ où $\mathrm{std}(\lambda)$ est le nombre de tableaux standards de forme λ.
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée 

- Un tableau pris uniformément est standard ssi chaque boîte b possède l'étiquette minimale dans son équerre $\rightsquigarrow$ probabilité $\frac{1}{h(b)}$ si l'équerre possède $h(b)$ boîtes.

Bonus : formule des équerres

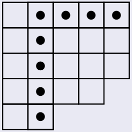
Rappel

- La mesure de Plancherel est donnée par $\mathrm{Pl}_n(\lambda) = \frac{\mathrm{std}(\lambda)^2}{n!}$ où $\mathrm{std}(\lambda)$ est le nombre de tableaux standards de forme λ.
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée 

- Un tableau pris uniformément est standard ssi chaque boîte b possède l'étiquette minimale dans son équerre $\rightsquigarrow$ probabilité $\frac{1}{h(b)}$ si l'équerre possède $h(b)$ boîtes.
- On en « déduit » que la probabilité d'être standard est $\frac{1}{\prod_b h(b)}$, où b parcourt l'ensemble des boîtes du diagramme de Young.

Bonus : formule des équerres

Rappel

- La mesure de Plancherel est donnée par $\mathrm{Pl}_n(\lambda) = \frac{\mathrm{std}(\lambda)^2}{n!}$ où $\mathrm{std}(\lambda)$ est le nombre de tableaux standards de forme λ.
- Une équerre d'un diagramme de Young est l'ensemble des boîtes qui se trouvent directement en bas ou directement à droite d'une boîte donnée 

- Un tableau pris uniformément est standard ssi chaque boîte b possède l'étiquette minimale dans son équerre $\rightsquigarrow$ probabilité $\frac{1}{h(b)}$ si l'équerre possède $h(b)$ boîtes.
- On en « déduit » que la probabilité d'être standard est $\frac{1}{\prod_b h(b)}$, où b parcourt l'ensemble des boîtes du diagramme de Young.
- Ainsi $\mathrm{std}(\lambda) = \frac{n!}{\prod_b h(b)}$ et $\mathrm{Pl}_n(\lambda) = \frac{n!}{\prod_b h(b)^2}$.