Décalage sur les blocs des algèbres d'Ariki–Koike

Salim Rostam

Univ. Rennes

05 février 2021

Séminaire GAAO, LMBP (Clermont-Ferrand)

1. Bloc associé à une multi-partition

2. Décalage sur les blocs : cas des multi-partitions

3. Décalage sur les blocs : cas des partitions

4. L'ensemble des blocs contient un ensemble de sur-niveau

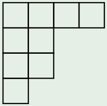
Partitions

Définition

Une **partition** est une suite décroissante d'entiers strictement positifs.

On peut représenter une partition λ à l'aide de son **diagramme de Young** $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

La suite $(4, 2, 2, 1)$ est une partition et son diagramme de Young est  .

Les cases du diagramme de Young sont indexées par $\mathbb{N}^2$.

Partitions

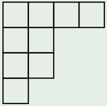
Définition

Une **partition** est une suite décroissante d'entiers strictement positifs.

On peut représenter une partition λ à l'aide de son **diagramme de Young** $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

La suite $(4, 2, 2, 1)$ est une partition et son diagramme de Young est



.

Les cases du diagramme de Young sont indexées par $\mathbb{N}^2$.

Théorème

Les partitions de n paramètrent les représentations complexes irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Résidu d'une case

Soient $e \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$.

Définition

Le **résidu** d'une case $\gamma = (a, b)$ est $\mathrm{res}(\gamma) := b - a + s \pmod{e}$.

Exemple

On prend $e = 3$ et $s = 1$. Les partitions $(4, 2, 1)$ et $(2, 2, 2, 1)$ ont le même multi-ensemble de résidus associé.

1	2	0	1
0	1		
2			

1	2
0	1
2	0
1	

Résidu d'une case

Soient $e \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$.

Définition

Le **résidu** d'une case $\gamma = (a, b)$ est $\mathrm{res}(\gamma) := b - a + s \pmod{e}$.

Exemple

On prend $e = 3$ et $s = 1$. Les partitions $(4, 2, 1)$ et $(2, 2, 2, 1)$ ont le même multi-ensemble de résidus associé.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 \\
\cline{1-2}
2 \\
\cline{1-1}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|c|c|}
\hline
1 & 2 \\
\hline
0 & 1 \\
\hline
2 & 0 \\
\hline
1 \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

Question (pour plus tard)

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une partition ?

Bloc associé à une partition

Soit $Q = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\alpha_i$ un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{\alpha_i : i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\}$.

Définition

Le **bloc** associé à une partition λ est

$$\alpha^s(\lambda) := \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\lambda)} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} \in Q.$$

Bloc associé à une partition

Soit $Q = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\alpha_i$ un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{\alpha_i : i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\}$.

Définition

Le **bloc** associé à une partition λ est

$$\alpha^s(\lambda) := \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\lambda)} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} \in Q.$$

Exemple

Avec $e = 3$ et $s = 1$, le multi-ensemble de résidus de la partition $\lambda := (3, 3, 1)$ est $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ et on a $\alpha^s(\lambda) = 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

Bloc associé à une partition

Soit $Q = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\alpha_i$ un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{\alpha_i : i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\}$.

Définition

Le **bloc** associé à une partition λ est

$$\alpha^s(\lambda) := \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\lambda)} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} \in Q.$$

Exemple

Avec $e = 3$ et $s = 1$, le multi-ensemble de résidus de la partition $\lambda := (3, 3, 1)$ est $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ et on a $\alpha^s(\lambda) = 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

Théorème (« Conjecture de Nakayama », Nakayama 40, Brauer 47, Robinson 47)

Si $e = p$ est premier, les blocs des partitions de n paramètrent les blocs de l'algèbre du groupe $\mathfrak{S}_n$ en caractéristique p.

Multi-partitions

Une r-**partition** (ou **multi-partition**) est un r-uplet

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$$

de partitions. Son diagramme de Young $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est la partie de $\mathbb{N}^2 \times \{1, \ldots, r\}$ définie par :

$$(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda}) \iff (a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda^{(j)}).$$

Multi-partitions

Une r-**partition** (ou **multi-partition**) est un r-uplet

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$$

de partitions. Son diagramme de Young $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est la partie de $\mathbb{N}^2 \times \{1, \dots, r\}$ définie par :

$$(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda}) \iff (a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda^{(j)}).$$

Théorème

Les r-partitions de n paramètrent les représentations complexes irréductibles du groupe $G(r, 1, n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

Bloc associé à une multi-partition

Pour $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$, le résidu d'une case $(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est le résidu de la case $(a, b) \in \mathcal{Y}\big(\lambda^{(j)}\big)$ pour la charge s_j. Le bloc associé à $\boldsymbol{\lambda}$ est

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} = \sum_{j=1}^{r} \alpha^{s_j}\big(\lambda^{(j)}\big) \in Q.$$

Bloc associé à une multi-partition

Pour $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$, le résidu d'une case $(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est le résidu de la case $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda^{(j)})$ pour la charge s_j. Le bloc associé à $\boldsymbol{\lambda}$ est

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} = \sum_{j=1}^{r} \alpha^{s_j}(\lambda^{(j)}) \in Q.$$

Exemple

On prend $e = 3$ et $\boldsymbol{s} = (1, 0)$. Le multi-ensemble de résidus de la bipartition $\boldsymbol{\lambda} := ((4, 2, 1), (2, 2, 2, 1))$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} \end{array}$. Le bloc associé est $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = 5\alpha_0 + 5\alpha_1 + 4\alpha_2$.

Bloc associé à une multi-partition

Pour $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$, le résidu d'une case $(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est le résidu de la case $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda^{(j)})$ pour la charge s_j. Le bloc associé à $\boldsymbol{\lambda}$ est

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) := \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} = \sum_{j=1}^{r} \alpha^{s_j}(\lambda^{(j)}) \in Q.$$

Exemple

On prend $e = 3$ et $\boldsymbol{s} = (1, 0)$. Le multi-ensemble de résidus de la bipartition $\boldsymbol{\lambda} := ((4, 2, 1), (2, 2, 2, 1))$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1}\end{array}$. Le bloc associé est $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = 5\alpha_0 + 5\alpha_1 + 4\alpha_2$.

Question (pour plus tard)

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une multi-partition ?

1. Bloc associé à une multi-partition
2. Décalage sur les blocs : cas des multi-partitions
3. Décalage sur les blocs : cas des partitions
4. L'ensemble des blocs contient un ensemble de sur-niveau

Décalage sur les multi-partitions

Soient d, p tels que $r = dp$. Le groupe $G(r, 1, n)$ possède un sous-groupe $G(r, p, n)$ d'indice p. Les représentations complexes irréductibles de ce dernier dépendent du comportement des r-partitions sous l'opération de décalage suivante :

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}\right) \\ \longmapsto {}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} := \left(\lambda^{(r-d+1)}, \dots, \lambda^{(r)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-d)}\right).$$

Décalage sur les multi-partitions

Soient d, p tels que $r = dp$. Le groupe $G(r, 1, n)$ possède un sous-groupe $G(r, p, n)$ d'indice p. Les représentations complexes irréductibles de ce dernier dépendent du comportement des r-partitions sous l'opération de décalage suivante :

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}) \longmapsto {}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} := (\lambda^{(r-d+1)}, \ldots, \lambda^{(r)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r-d)}).$$

Exemple

Soient λ, μ, ν trois partitions. Avec $r = p = 3$ on a

$${}^{\sigma}(\lambda, \mu, \nu) = (\nu, \lambda, \mu).$$

Décalage sur les multi-partitions

Soient d, p tels que $r = dp$. Le groupe $G(r, 1, n)$ possède un sous-groupe $G(r, p, n)$ d'indice p. Les représentations complexes irréductibles de ce dernier dépendent du comportement des r-partitions sous l'opération de décalage suivante :

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \longmapsto {}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} := (\lambda^{(r-d+1)}, \dots, \lambda^{(r)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-d)}).$$

Exemple

Soient λ, μ, ν trois partitions. Avec $r = p = 3$ on a

$${}^{\sigma}(\lambda, \mu, \nu) = (\nu, \lambda, \mu).$$

Problème

Comment $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\alpha^{\boldsymbol{s}}({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda})$ sont-ils reliés ?

Décalage sur les blocs

On suppose que p est également un diviseur de $e \geq 2$ et on note $e' := \frac{e}{p}$. L'opération de décalage $\sigma : Q \to Q$ est l'application $\mathbb{Z}$-linéaire d'ordre p définie pour tout $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par

$$\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+e'}.$$

Décalage sur les blocs

On suppose que p est également un diviseur de $e \geq 2$ et on note $e' := \frac{e}{p}$. L'opération de décalage $\sigma : Q \to Q$ est l'application $\mathbb{Z}$-linéaire d'ordre p définie pour tout $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par

$$\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+e'}.$$

Hypothèse

On suppose désormais que $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$ vérifie

$$s_{k+d} = s_k + e' \pmod{e},$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ (avec $d = \frac{r}{p}$).

Décalage sur les blocs

On suppose que p est également un diviseur de $e \geq 2$ et on note $e' := \frac{e}{p}$. L'opération de décalage $\sigma : Q \to Q$ est l'application $\mathbb{Z}$-linéaire d'ordre p définie pour tout $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par

$$\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+e'}.$$

Hypothèse

On suppose désormais que $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$ vérifie

$$s_{k+d} = s_k + e' \pmod{e},$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ (avec $d = \frac{r}{p}$).

Proposition

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = \sigma \cdot \alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Décalage sur les blocs

On suppose que p est également un diviseur de $e \geq 2$ et on note $e' := \frac{e}{p}$. L'opération de décalage $\sigma : Q \to Q$ est l'application $\mathbb{Z}$-linéaire d'ordre p définie pour tout $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par

$$\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+e'}.$$

Hypothèse

On suppose désormais que $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$ vérifie

$$s_{k+d} = s_k + e' \pmod{e},$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ (avec $d = \frac{r}{p}$).

Proposition

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = \sigma \cdot \alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Corollaire

Si $\boldsymbol{\lambda} = {}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}$ *alors* $\alpha := \alpha^{s}(\boldsymbol{\lambda})$ *vérifie* $\alpha = \sigma \cdot \alpha$.

Décalage sur les blocs : exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.

Décalage sur les blocs : exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.

Décalage sur les blocs : exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.

Décalage sur les blocs : exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.
- Avec $\boldsymbol{\lambda} = \big((4,2),(1)\big)$ on a ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} = \big((1),(4,2)\big)$.

Décalage sur les blocs : exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.
- Avec $\boldsymbol{\lambda} = ((4,2),(1))$ on a ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} = ((1),(4,2))$.
- Les multi-ensembles de résidus sont respectivement

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}, \qquad\qquad \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array}.$$

Décalage sur les blocs : exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.
- Avec $\boldsymbol{\lambda} = ((4,2),(1))$ on a ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} = ((1),(4,2))$.
- Les multi-ensembles de résidus sont respectivement

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3\\\hline 5&0\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}\,, \qquad\qquad \begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&4&5&0\\\hline 2&3\\\cline{1-2}\end{array}\,.$$

- On a donc

$$\begin{aligned}\alpha^{\boldsymbol{s}}({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) &= 2\alpha_0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\\ &= \sigma \cdot (2\alpha_3 + \alpha_5 + 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)\\ &= \sigma \cdot \alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}$$

Lien entre les tailles d'orbites

On note $[\boldsymbol{\lambda}]$ l'orbite d'une multi-partition $\boldsymbol{\lambda}$ sous l'action de σ :

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \{{}^{\sigma^k}\boldsymbol{\lambda} : k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}.$$

On note de même $[\alpha]$ l'orbite de $\alpha \in Q$ sous l'action de σ.

Proposition

$$\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] \leq \#[\boldsymbol{\lambda}]$$

Lien entre les tailles d'orbites

On note $[\boldsymbol{\lambda}]$ l'orbite d'une multi-partition $\boldsymbol{\lambda}$ sous l'action de σ :

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \{{}^{\sigma^k}\boldsymbol{\lambda} : k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}.$$

On note de même $[\alpha]$ l'orbite de $\alpha \in Q$ sous l'action de σ.

Proposition

$$\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] \leq \#[\boldsymbol{\lambda}]$$

L'inégalité réciproque n'est pas nécessairement vérifiée, par exemple avec $\boldsymbol{\lambda} = ((e), \emptyset, \ldots, \emptyset)$ qui vérifie $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i$.

Lien entre les tailles d'orbites

On note $[\boldsymbol{\lambda}]$ l'orbite d'une multi-partition $\boldsymbol{\lambda}$ sous l'action de σ :

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \{{}^{\sigma^k}\boldsymbol{\lambda} : k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}.$$

On note de même $[\alpha]$ l'orbite de $\alpha \in Q$ sous l'action de σ.

Proposition

$$\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] \leq \#[\boldsymbol{\lambda}]$$

L'inégalité réciproque n'est pas nécessairement vérifiée, par exemple avec $\boldsymbol{\lambda} = ((e), \emptyset, \dots, \emptyset)$ qui vérifie $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i$.

Théorème (R. 17)

On suppose que $\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] = 1$. Il existe une multi-partition $\boldsymbol{\mu}$ vérifiant $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\mu}) = \alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\#[\boldsymbol{\mu}] = 1$.

Lien entre les tailles d'orbites

On note $[\boldsymbol{\lambda}]$ l'orbite d'une multi-partition $\boldsymbol{\lambda}$ sous l'action de σ :

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \{{}^{\sigma^k}\boldsymbol{\lambda} : k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}.$$

On note de même $[\alpha]$ l'orbite de $\alpha \in Q$ sous l'action de σ.

Proposition

$$\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] \leq \#[\boldsymbol{\lambda}]$$

L'inégalité réciproque n'est pas nécessairement vérifiée, par exemple avec $\boldsymbol{\lambda} = ((e), \emptyset, \dots, \emptyset)$ qui vérifie $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i$.

Théorème (R. 17)

On suppose que $\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] = 1$. Il existe une multi-partition $\boldsymbol{\mu}$ vérifiant $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\mu}) = \alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\#[\boldsymbol{\mu}] = 1$.

Corollaire

$$\min\{\#[\boldsymbol{\mu}] : \alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\mu}) = \alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})\} = \#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})].$$

Exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.

Exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.
- Le multi-ensemble de résidus de $\boldsymbol{\lambda} = ((1,1),(3,2,2,1))$ est

$$\begin{array}{l} \boxed{0} \\ \boxed{5} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \\ \boxed{0} & & \end{array}.$$

Exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.
- Le multi-ensemble de résidus de $\boldsymbol{\lambda} = ((1,1),(3,2,2,1))$ est

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

- On a

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = (2\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2) + (2\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5),$$

Exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.
- Le multi-ensemble de résidus de $\boldsymbol{\lambda} = ((1,1),(3,2,2,1))$ est

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

- On a

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = (2\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2) + (2\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5),$$

donc $\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] = 1$.

Exemple

- On prend $r = p = 2$ et $e = 6$.
- On a $d = \frac{r}{p} = 1$ et $e' = \frac{e}{p} = 3$.
- La bi-charge $\boldsymbol{s} = (0, e')$ vérifie la condition précédente.
- Le multi-ensemble de résidus de $\boldsymbol{\lambda} = ((1,1),(3,2,2,1))$ est

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 0 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}\,.$$

- On a

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = (2\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2) + (2\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5),$$

donc $\#[\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})] = 1$.
- Le même bloc est obtenu avec la bipartition bégayante $\boldsymbol{\mu} := ((3,2),(3,2))$, en effet :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}\,.$$

Idée de la démonstration

- À l'aide de la représentation des partitions sous forme d'abaque, on obtient une paramétrisation des partitions par $\mathbb{Z}^{e-1}(\times\mathbb{N})$.

Idée de la démonstration

- À l'aide de la représentation des partitions sous forme d'abaque, on obtient une paramétrisation des partitions par $\mathbb{Z}^{e-1}(\times\mathbb{N})$.
- On se ramène à un problème d'optimisation d'une fonction convexe f à variables entières soumises à des contraintes linéaires.

Idée de la démonstration

- À l'aide de la représentation des partitions sous forme d'abaque, on obtient une paramétrisation des partitions par $\mathbb{Z}^{e-1}(\times\mathbb{N})$.
- On se ramène à un problème d'optimisation d'une fonction convexe f à variables entières soumises à des contraintes linéaires.
- On le résout en montrant qu'une matrice à coefficients dans $\{0, \frac{1}{p} \ldots, \frac{p-1}{p}\}$ peut être écrite comme moyenne de p matrices binaires M_i conservant la somme sur certains blocs.

1. Bloc associé à une multi-partition

2. Décalage sur les blocs : cas des multi-partitions

3. Décalage sur les blocs : cas des partitions

4. L'ensemble des blocs contient un ensemble de sur-niveau

Présentation du problème

Convention

On supposera systématiquement que la charge $s \in \mathbb{Z}$ est nulle.

L'opération $\sigma : Q \to Q$, donnée par $\sigma \cdot \alpha_i = \alpha_{i+e'}$, est toujours définie (avec $e = pe'$). Cependant, l'opération $\lambda \mapsto {}^{\sigma}\lambda$ sur les (1)-partitions est ici triviale.

Présentation du problème

Convention

On supposera systématiquement que la charge $s \in \mathbb{Z}$ est nulle.

L'opération $\sigma : Q \to Q$, donnée par $\sigma \cdot \alpha_i = \alpha_{i+e'}$, est toujours définie (avec $e = pe'$). Cependant, l'opération $\lambda \mapsto {}^{\sigma}\lambda$ sur les (1)-partitions est ici triviale.

Question

Existe-t-il une opération $\lambda \mapsto {}^{\sigma}\lambda$ sur les partitions qui vérifie $\alpha({}^{\sigma}\lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda)$?

Présentation du problème

Convention

On supposera systématiquement que la charge $s \in \mathbb{Z}$ est nulle.

L'opération $\sigma : Q \to Q$, donnée par $\sigma \cdot \alpha_i = \alpha_{i+e'}$, est toujours définie (avec $e = pe'$). Cependant, l'opération $\lambda \mapsto {}^{\sigma}\lambda$ sur les (1)-partitions est ici triviale.

Question

Existe-t-il une opération $\lambda \mapsto {}^{\sigma}\lambda$ sur les partitions qui vérifie $\alpha({}^{\sigma}\lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda)$?

La réponse se fera en deux étapes :

- une CNS pour qu'il existe une partition μ telle que $\alpha(\mu) = \sigma \cdot \alpha(\lambda)$;

Présentation du problème

Convention

On supposera systématiquement que la charge $s \in \mathbb{Z}$ est nulle.

L'opération $\sigma : Q \to Q$, donnée par $\sigma \cdot \alpha_i = \alpha_{i+e'}$, est toujours définie (avec $e = pe'$). Cependant, l'opération $\lambda \mapsto {}^{\sigma}\lambda$ sur les (1)-partitions est ici triviale.

Question

Existe-t-il une opération $\lambda \mapsto {}^{\sigma}\lambda$ sur les partitions qui vérifie $\alpha({}^{\sigma}\lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda)$?

La réponse se fera en deux étapes :

- une CNS pour qu'il existe une partition μ telle que $\alpha(\mu) = \sigma \cdot \alpha(\lambda)$;
- si cette CNS est vérifiée, une construction des éléments μ correspondant (sans choix canonique pour ${}^{\sigma}\lambda$).

Cœurs

Définition

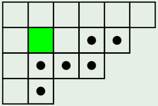
Un **ruban** d'une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme

$$\rho_{(a,b)} = \{(a',b') \in \mathcal{Y}(\lambda) : a' \geq a, b' \geq b \text{ et } (a'+1, b'+1) \notin \mathcal{Y}(\lambda)\},$$

avec $(a,b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$.

Un e-**ruban** est un ruban de cardinal e.

Exemple



est le 6-ruban $\rho_{(1,1)}$ de la partition $(6,5,4,2)$.

Cœurs

Définition

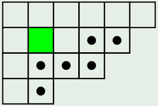
Un **ruban** d'une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme

$$\rho_{(a,b)} = \{(a', b') \in \mathcal{Y}(\lambda) : a' \geq a, b' \geq b \text{ et } (a'+1, b'+1) \notin \mathcal{Y}(\lambda)\},$$

avec $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$.

Un e-**ruban** est un ruban de cardinal e.

Exemple



est le 6-ruban $\rho_{(1,1)}$ de la partition $(6, 5, 4, 2)$.

Définition

Une partition n'ayant pas de e-ruban est un e-**cœur**.

Poids d'une partition

Proposition

Soit λ *une partition. Si* $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ *alors* $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \rho_{(a,b)}$ *est de la forme* $\mathcal{Y}(\mu)$ *pour une certaine partition* μ*.*

Poids d'une partition

Proposition

Soit λ une partition. Si $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ alors $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \rho_{(a,b)}$ est de la forme $\mathcal{Y}(\mu)$ pour une certaine partition μ.

Étant donnée une partition λ, on peut alors construite une suite de partitions $\mu^{(0)} := \lambda, \ldots, \mu^{(w)}$ de la façon suivante :

- si $\mu^{(i)}$ est un e-cœur on pose $w := i$ et on s'arrête ;
- sinon, on choisit une partition $\mu^{(i+1)}$ obtenue en enlevant un e-ruban à $\mu^{(i)}$.

Poids d'une partition

Proposition

Soit λ une partition. Si $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ alors $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \rho_{(a,b)}$ est de la forme $\mathcal{Y}(\mu)$ pour une certaine partition μ.

Étant donnée une partition λ, on peut alors construite une suite de partitions $\mu^{(0)} := \lambda, \dots, \mu^{(w)}$ de la façon suivante :

- si $\mu^{(i)}$ est un e-cœur on pose $w := i$ et on s'arrête ;
- sinon, on choisit une partition $\mu^{(i+1)}$ obtenue en enlevant un e-ruban à $\mu^{(i)}$.

La suite $\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(w)}$ n'est pas nécessairement unique, cependant :

Proposition-Définition

*L'entier $\mathrm{w}_e(\lambda) := w$ est uniquement déterminé : c'est le e-**poids** de λ.*

Poids d'une partition

Proposition

Soit λ une partition. Si $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ alors $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \rho_{(a,b)}$ est de la forme $\mathcal{Y}(\mu)$ pour une certaine partition μ.

Étant donnée une partition λ, on peut alors construite une suite de partitions $\mu^{(0)} := \lambda, \ldots, \mu^{(w)}$ de la façon suivante :

- si $\mu^{(i)}$ est un e-cœur on pose $w := i$ et on s'arrête ;
- sinon, on choisit une partition $\mu^{(i+1)}$ obtenue en enlevant un e-ruban à $\mu^{(i)}$.

La suite $\mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(w)}$ n'est pas nécessairement unique, cependant :

Proposition-Définition

*L'entier $\mathrm{w}_e(\lambda) := w$ est uniquement déterminé : c'est le e-**poids** de λ.*

La partition $\mu^{(w)}$ est également uniquement déterminée : c'est le e-**cœur** de λ.

Poids d'un bloc

Théorème (James–Kerber 81)

Deux partitions λ *et* μ *vérifient* $\alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ *si et seulement si elles ont même e-cœur et même e-poids.*

Poids d'un bloc

Théorème (James–Kerber 81)

Deux partitions λ et μ vérifient $\alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ si et seulement si elles ont même e-cœur et même e-poids.

Définition (Fayers 06, R. 20)

Le **poids** de $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ est

$$\mathrm{w}(\alpha) \coloneqq c_0 - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

Poids d'un bloc

Théorème (James–Kerber 81)

Deux partitions λ et μ vérifient $\alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ si et seulement si elles ont même e-cœur et même e-poids.

Définition (Fayers 06, R. 20)

Le **poids** de $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ est

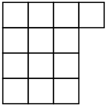
$$\mathrm{w}(\alpha) := c_0 - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

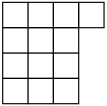
Théorème (Fayers 06)

On a $\mathrm{w}_e(\lambda) = \mathrm{w}(\alpha(\lambda))$.

Exemple

- La partition $(4,3,3,3)$ a pour 4-cœur $(4,1)$ et 4-poids 2 :



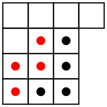


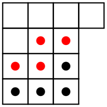
Exemple

- La partition $(4, 3, 3, 3)$ a pour 4-cœur $(4, 1)$ et 4-poids 2 :

Exemple

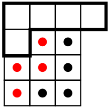
- La partition $(4, 3, 3, 3)$ a pour 4-cœur $(4, 1)$ et 4-poids 2 :

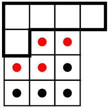




Exemple

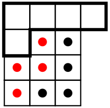
- La partition $(4,3,3,3)$ a pour 4-cœur $(4,1)$ et 4-poids 2 :

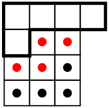




Exemple

- La partition $(4, 3, 3, 3)$ a pour 4-cœur $(4, 1)$ et 4-poids 2 :





- Le multi-ensemble de résidus est

0	1	2	3
3	0	1	
2	3	0	
1	2	3	

donc $\alpha(\lambda) = 3\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3$.

Exemple

- La partition $(4,3,3,3)$ a pour 4-cœur $(4,1)$ et 4-poids 2 :

- Le multi-ensemble de résidus est

0	1	2	3
3	0	1	
2	3	0	
1	2	3	

  donc $\alpha(\lambda) = 3\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3$.

- On a bien

$$\begin{aligned} w(\alpha(\lambda)) &= 3 - \frac{1}{2}((3-4)^2 + (4-3^2) \\ &= 3 - 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Reconnaître les diagrammes de Young

Question (rappel)

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une partition ?

Reconnaître les diagrammes de Young

Question (rappel)

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une partition ?

Lemme (R. 20)

On a

$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ e-cœur}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) = 0\}.$$

Théorème (R. 20)

On a

$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) \geq 0\}.$$

Reconnaître les diagrammes de Young

Question (rappel)

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une partition ?

Lemme (R. 20)

On a

$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ e-cœur}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) = 0\}.$$

Théorème (R. 20)

On a

$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) \geq 0\}.$$

Corollaire (Fayers 07, R. 20)

On suppose $e > 0$. Pour tout $\alpha \in Q$, il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + h\sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i = \alpha(\lambda)$ pour une certaine partition λ.

Exemple

- On prend $e = 4$ (et $s = 0$).

Exemple

- On prend $e = 4$ (et $s = 0$).
- L'élément $\alpha_1 \in Q$ n'est pas de la forme $\alpha(\lambda)$, et en effet :

$$\mathrm{w}(\alpha_1) = 0 - \frac{1}{2}\left((1-0)^2 + (0-1)^2\right) = -1.$$

Exemple

- On prend $e = 4$ (et $s = 0$).
- L'élément $\alpha_1 \in Q$ n'est pas de la forme $\alpha(\lambda)$, et en effet :

$$\mathrm{w}(\alpha_1) = 0 - \frac{1}{2}\left((1-0)^2 + (0-1)^2\right) = -1.$$

- L'élément $\alpha := \alpha_1 + \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie

$$\mathrm{w}(\alpha) = \mathrm{w}(\alpha_1) + 1 = 0.$$

Exemple

- On prend $e = 4$ (et $s = 0$).
- L'élément $\alpha_1 \in Q$ n'est pas de la forme $\alpha(\lambda)$, et en effet :

$$\mathrm{w}(\alpha_1) = 0 - \frac{1}{2}\left((1-0)^2 + (0-1)^2\right) = -1.$$

- L'élément $\alpha := \alpha_1 + \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie

$$\mathrm{w}(\alpha) = \mathrm{w}(\alpha_1) + 1 = 0.$$

- On a $\alpha = \alpha(\lambda)$ avec (uniquement) $\lambda = (2, 1, 1, 1)$:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Décalage sur les partitions

Rappel du problème initial

Soit λ une partition. A-t-on $\sigma \cdot \alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ pour une certaine partition μ ?

Décalage sur les partitions

Rappel du problème initial

Soit λ une partition. A-t-on $\sigma \cdot \alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ pour une certaine partition μ ?

Pour $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ on a $\mathrm{w}(\sigma \cdot \alpha) = \mathrm{w}(\alpha) + c_\eta - c_0$.

Proposition

Le problème précédent possède une réponse positive si et seulement si $c_0(\lambda) \leq c_{e'}(\lambda) + \mathrm{w}_e(\lambda)$.

Décalage sur les partitions

Rappel du problème initial

Soit λ une partition. A-t-on $\sigma \cdot \alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ pour une certaine partition μ ?

Pour $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ on a $\mathrm{w}(\sigma \cdot \alpha) = \mathrm{w}(\alpha) + c_\eta - c_0$.

Proposition

Le problème précédent possède une réponse positive si et seulement si $c_0(\lambda) \leq c_{e'}(\lambda) + \mathrm{w}_e(\lambda)$.

On peut construire une telle partition μ (de façon non canonique) en utilisant une permutation circulaire du e-**quotient** de λ ($\approx$ élément de $\mathbb{Z}^{e-1}$ associé).

1. Bloc associé à une multi-partition
2. Décalage sur les blocs : cas des multi-partitions
3. Décalage sur les blocs : cas des partitions
4. L'ensemble des blocs contient un ensemble de sur-niveau

Reconnaître les multi-diagrammes de Young

Rappel

$$\{\alpha(\lambda) : \lambda \text{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) \geq 0\}$$

Que dire pour les multi-partitions ?

Reconnaître les multi-diagrammes de Young

Rappel

$$\{\alpha(\lambda) : \lambda \text{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) \geq 0\}$$

Que dire pour les multi-partitions ?

Pour $e > 0$, on montre cette fois un résultat de la forme suivante :

$$Q^{\boldsymbol{s}} := \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) \geq N\}, \quad (\clubsuit)$$

Reconnaître les multi-diagrammes de Young

Rappel

$$\{\alpha(\lambda) : \lambda \text{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) \geq 0\}$$

Que dire pour les multi-partitions ?

Pour $e > 0$, on montre cette fois un résultat de la forme suivante :

$$Q^{\boldsymbol{s}} := \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) \geq N\}, \quad (\clubsuit)$$

où :

- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}$ généralise la fonction poids sur les multi-partitions (Fayers) ;
- N est une certaine constante ne dépendant pas de la taille des multi-partitions ;

Reconnaître les multi-diagrammes de Young

Rappel

$$\{\alpha(\lambda) : \lambda \text{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) \geq 0\}$$

Que dire pour les multi-partitions ?

Pour $e > 0$, on montre cette fois un résultat de la forme suivante :

$$Q^{\boldsymbol{s}} := \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) \geq N\}, \quad (\clubsuit)$$

où :

- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}$ généralise la fonction poids sur les multi-partitions (Fayers) ;
- N est une certaine constante ne dépendant pas de la taille des multi-partitions ;

l'ensemble de droite dans $(\clubsuit)$ étant infini.

Reconnaître les multi-diagrammes de Young

Rappel

$$\{\alpha(\lambda) : \lambda \text{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}(\alpha) \geq 0\}$$

Que dire pour les multi-partitions ?

Pour $e > 0$, on montre cette fois un résultat de la forme suivante :

$$Q^{\boldsymbol{s}} := \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) \geq N\}, \quad (\clubsuit)$$

où :

- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}$ généralise la fonction poids sur les multi-partitions (Fayers) ;
- N est une certaine constante ne dépendant pas de la taille des multi-partitions ;

l'ensemble de droite dans $(\clubsuit)$ étant infini.

Remarque

L'inlcusion $(\clubsuit)$ est **fausse** quand $e = 0$.

Poids d'une multi-partition

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$.

Définition (Fayers 06)

Le $\boldsymbol{s}$**-poids** de $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ est

$$\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) := \sum_{j=1}^{r} c_{s_j} - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

Le $\boldsymbol{s}$-poids $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ d'une multipartition $\boldsymbol{\lambda}$ est le $\boldsymbol{s}$-poids de $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

Remarque

Si $r = 1$ alors $\mathrm{w}^s(\lambda) = \mathrm{w}_e(\lambda)$.

Poids d'une multi-partition

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$.

Définition (Fayers 06)

Le ***s*-poids** de $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ est

$$\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) := \sum_{j=1}^{r} c_{s_j} - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

Le $\boldsymbol{s}$-poids $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ d'une multipartition $\boldsymbol{\lambda}$ est le $\boldsymbol{s}$-poids de $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

Remarque

Si $r = 1$ alors $\mathrm{w}^s(\lambda) = \mathrm{w}_e(\lambda)$.

Proposition (Fayers 06)

Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une multi-partition alors $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) \geq 0$.

Poids des blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^s = \{\alpha^s(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Si $\alpha \in Q^s$ alors $\alpha + \delta \in Q^s$.

Poids des blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^s = \{\alpha^s(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Si $\alpha \in Q^s$ alors $\alpha + \delta \in Q^s$.

Définition (Fayers 07)

Un **bloc cœur** est un élément $\alpha \in Q^s$ vérifiant $\alpha - \delta \notin Q^s$.

Poids des blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^{\boldsymbol{s}} = \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ alors $\alpha + \delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$.

Définition (Fayers 07)

Un **bloc cœur** est un élément $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ vérifiant $\alpha - \delta \notin Q^{\boldsymbol{s}}$.

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} := \max\{\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) : \alpha \in Q^{\boldsymbol{s}} \text{ bloc cœur et } \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^r\} < \infty.$$

Poids des blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^{\boldsymbol{s}} = \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ alors $\alpha + \delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$.

Définition (Fayers 07)

Un **bloc cœur** est un élément $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ vérifiant $\alpha - \delta \notin Q^{\boldsymbol{s}}$.

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} := \max\{\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) : \alpha \in Q^{\boldsymbol{s}} \text{ bloc cœur et } \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^r\} < \infty.$$

Un point essentiel de la démonstration est la description explicite par Fayers des abaques associés aux e-multi-cœurs $\boldsymbol{\lambda}$ tels que $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ est un bloc cœur.

Ensemble de sur-niveau contenu dans l'ensemble des blocs

Proposition

Soit $\alpha \in Q$.

- *Il existe un unique* $h \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\alpha + h\delta$ *est un bloc cœur.*
- *On a* $h > 0 \iff \alpha \notin Q^{\mathbf{s}}$.

Ensemble de sur-niveau contenu dans l'ensemble des blocs

Proposition

Soit $\alpha \in Q$.

- *Il existe un unique* $h \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\alpha + h\delta$ *est un bloc cœur.*
- *On a* $h > 0 \iff \alpha \notin Q^{s}$.

Corollaire (R. 20)

$$Q^{s} = \{\alpha^{s}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{s}(\alpha) > N_{r,e} - r\}.$$

Ensemble de sur-niveau contenu dans l'ensemble des blocs

Proposition

Soit $\alpha \in Q$.

- *Il existe un unique $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + h\delta$ est un bloc cœur.*
- *On a $h > 0 \iff \alpha \notin Q^s$.*

Corollaire (R. 20)

$$Q^s = \{\alpha^s(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^s(\alpha) > N_{r,e} - r\}.$$

On estime ensuite la constante $N_{r,e}$:

- on minore en utilisant la super-additivité de $(N_{r,e})_e$;
- on majore en étudiant la forme quadratique

$$(E, F) \longmapsto \min(\#E, \#F) - \#(E \cap F),$$

définie pour $E, F \subseteq \{1, \ldots, e\}$.

Estimation de $N_{r,e}$

Théorème (R. 20)

$$\left\lfloor \frac{r^2}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor \leq N_{r,e} \leq \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor$$

Corollaire

Si e et r sont pairs alors $N_{r,e} = \frac{er^2}{8}$.

Estimation de $N_{r,e}$

Théorème (R. 20)

$$\left\lfloor \frac{r^2}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor \leq N_{r,e} \leq \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor$$

Corollaire

Si e et r sont pairs alors $N_{r,e} = \frac{er^2}{8}$.

On peut montrer que $N_{r,e}$ atteint la borne supérieure $\left\lfloor \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor \right\rfloor$ quand par exemple $r \in \{2, 4\}$ ou encore quand $e \in \{2, \ldots, 6\}$.

Proposition

Si $(r, e) \in \{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ alors

$$Q^{\mathbf{s}} = \{\alpha^{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \ r\text{-partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\mathbf{s}}(\alpha) \geq 0\}.$$

Fin

Merci de votre attention !