Blocs de l'algèbre d'Ariki–Koike et ensembles de sur-niveau pour la fonction poids généralisée

Salim Rostam

Univ. Rennes

26 janvier 2021

Séminaire d'algèbre-géométrie, LMV (Versailles)

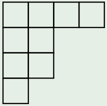
Partitions

Définition

Une **partition** est une suite décroissante d'entiers strictement positifs.

On peut représenter une partition λ à l'aide de son **diagramme de Young** $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

La suite $(4, 2, 2, 1)$ est une partition et son diagramme de Young est  .

Les cases du diagramme de Young sont indexées par $\mathbb{N}^2$.

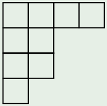
Partitions

Définition

Une **partition** est une suite décroissante d'entiers strictement positifs.

On peut représenter une partition λ à l'aide de son **diagramme de Young** $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

La suite $(4, 2, 2, 1)$ est une partition et son diagramme de Young est  .

Les cases du diagramme de Young sont indexées par $\mathbb{N}^2$.

Théorème

Les partitions de n paramètrent les représentations irréductibles complexes du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Résidu d'une case

Soient $e \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$.

Définition

Le **résidu** d'une case $\gamma = (a, b)$ est $\mathrm{res}(\gamma) := b - a + s \pmod{e}$.

Exemple

On prend $e = 3$ et $s = 1$. Les partitions $(4, 2, 1)$ et $(2, 2, 2, 1)$ ont le même multi-ensemble de résidus associé.

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 \end{ytableau}$$

Résidu d'une case

Soient $e \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$.

Définition

Le **résidu** d'une case $\gamma = (a, b)$ est $\mathrm{res}(\gamma) := b - a + s \pmod e$.

Exemple

On prend $e = 3$ et $s = 1$. Les partitions $(4, 2, 1)$ et $(2, 2, 2, 1)$ ont le même multi-ensemble de résidus associé.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Question

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une partition ?

Bloc associé à une partition

Soit $Q = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\alpha_i$ un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{\alpha_i : i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\}$.

Définition

Le **bloc** associé à une partition λ est

$$\alpha^s(\lambda) := \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\lambda)} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} \in Q.$$

Le bloc associé à une partition correspond au multi-ensemble de résidus de son diagramme de Young.

Bloc associé à une partition

Soit $Q = \oplus_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\alpha_i$ un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{\alpha_i : i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\}$.

Définition

Le **bloc** associé à une partition λ est

$$\alpha^s(\lambda) := \sum_{\gamma\in\mathcal{Y}(\lambda)} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} \in Q.$$

Le bloc associé à une partition correspond au multi-ensemble de résidus de son diagramme de Young.

Théorème (« Conjecture de Nakayama », Nakayama 40, Brauer 47, Robinson 47)

Si $e = p$ est premier, les blocs des partitions de n paramètrent les blocs de l'algèbre du groupe $\mathfrak{S}_n$ en caractéristique p.

Cœurs

Définition

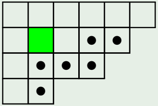
Un **ruban** d'une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme

$$\rho_{(a,b)} = \{(a', b') \in \mathcal{Y}(\lambda) : a' \geq a, b' \geq b \text{ et } (a'+1, b'+1) \notin \mathcal{Y}(\lambda)\},$$

avec $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$.

Un e-**ruban** est un ruban de cardinal e.

Exemple


est le 6-ruban $\rho_{(1,1)}$ de la partition $(6, 5, 4, 2)$.

Cœurs

Définition

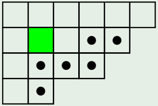
Un **ruban** d'une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme

$$\rho_{(a,b)} = \{(a', b') \in \mathcal{Y}(\lambda) : a' \geq a, b' \geq b \text{ et } (a'+1, b'+1) \notin \mathcal{Y}(\lambda)\},$$

avec $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$.

Un e-**ruban** est un ruban de cardinal e.

Exemple


est le 6-ruban $\rho_{(1,1)}$ de la partition $(6, 5, 4, 2)$.

Définition

Une partition n'ayant pas de e-ruban est un e-**cœur**.

Cœur d'une partition

Proposition

Soit λ *une partition. Si* $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ *alors* $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \rho_{(a,b)}$ *est de la forme* $\mathcal{Y}(\mu)$ *pour une certaine partition* μ.

Cœur d'une partition

Proposition

Soit λ une partition. Si $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ alors $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \rho_{(a,b)}$ est de la forme $\mathcal{Y}(\mu)$ pour une certaine partition μ.

Étant donnée une partition λ, on peut alors construite une suite de partitions $\mu^{(0)} := \lambda, \ldots, \mu^{(w)}$ de la façon suivante :

- si $\mu^{(i)}$ est un e-cœur on pose $w := i$ et on s'arrête ;
- sinon, on choisit une partition $\mu^{(i+1)}$ obtenue en enlevant un e-ruban à $\mu^{(i)}$.

Cœur d'une partition

Proposition

Soit λ *une partition. Si* $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ *alors* $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \rho_{(a,b)}$ *est de la forme* $\mathcal{Y}(\mu)$ *pour une certaine partition* μ*.*

Étant donnée une partition λ, on peut alors construite une suite de partitions $\mu^{(0)} := \lambda, \dots, \mu^{(w)}$ de la façon suivante :

- si $\mu^{(i)}$ est un e-cœur on pose $w := i$ et on s'arrête ;
- sinon, on choisit une partition $\mu^{(i+1)}$ obtenue en enlevant un e-ruban à $\mu^{(i)}$.

La suite $\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(w)}$ n'est pas nécessairement unique, cependant :

Proposition

L'entier $w \in \mathbb{N}$ *et la partition* $\mu^{(w)}$ *sont uniquement déterminés.*

Définition

L'entier $\mathrm{w}_e(\lambda) := w$ est le e-**poids** de λ et la partition $\overline{\lambda} := \mu^{(w)}$ est le e-**cœur** de λ.

Exemples

Propriété

Toutes les partitions sont des 0*-cœurs.*

Propriété

Les 1*-rubans sont exactement les boîtes enlevables. En particulier, la partition vide est le seul* 1*-cœur.*

Exemples

Propriété

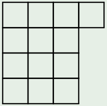
Toutes les partitions sont des 0-cœurs.

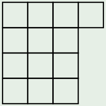
Propriété

Les 1-rubans sont exactement les boîtes enlevables. En particulier, la partition vide est le seul 1-cœur.

Exemple

Le 4-cœur de la partition $(4, 3, 3, 3)$ est $(4, 1)$:





Exemples

Propriété

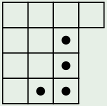
Toutes les partitions sont des 0-cœurs.

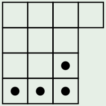
Propriété

Les 1-rubans sont exactement les boîtes enlevables. En particulier, la partition vide est le seul 1-cœur.

Exemple

Le 4-cœur de la partition $(4, 3, 3, 3)$ est $(4, 1)$:





Exemples

Propriété

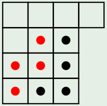
Toutes les partitions sont des 0-cœurs.

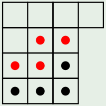
Propriété

Les 1-rubans sont exactement les boîtes enlevables. En particulier, la partition vide est le seul 1-cœur.

Exemple

Le 4-cœur de la partition $(4, 3, 3, 3)$ est $(4, 1)$:





Lien avec les blocs

Théorème (James–Kerber 81)

Deux partitions de n ont le même bloc associé si et seulement si elles ont le même e-cœur.

De façon équivalente, deux partitions sont dans le même bloc si et seulement si elles ont même e-cœur et même e-poids.

Lien avec les blocs

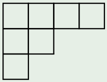
Théorème (James–Kerber 81)

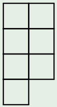
Deux partitions de n ont le même bloc associé si et seulement si elles ont le même e-cœur.

De façon équivalente, deux partitions sont dans le même bloc si et seulement si elles ont même e-cœur et même e-poids.

Exemple

On a vu que les partitions $(4, 2, 1)$ et $(2, 2, 2, 1)$ ont le même multi-ensemble de résidus associé pour $e = 3$. Le 3-cœur commun est (1) (et le 3-poids commun est 2) :





Lien avec les blocs

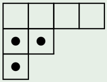
Théorème (James–Kerber 81)

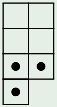
Deux partitions de n ont le même bloc associé si et seulement si elles ont le même e-cœur.

De façon équivalente, deux partitions sont dans le même bloc si et seulement si elles ont même e-cœur et même e-poids.

Exemple

On a vu que les partitions $(4, 2, 1)$ et $(2, 2, 2, 1)$ ont le même multi-ensemble de résidus associé pour $e = 3$. Le 3-cœur commun est (1) (et le 3-poids commun est 2) :





Lien avec les blocs

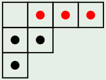
Théorème (James–Kerber 81)

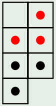
Deux partitions de n ont le même bloc associé si et seulement si elles ont le même e-cœur.

De façon équivalente, deux partitions sont dans le même bloc si et seulement si elles ont même e-cœur et même e-poids.

Exemple

On a vu que les partitions $(4, 2, 1)$ et $(2, 2, 2, 1)$ ont le même multi-ensemble de résidus associé pour $e = 3$. Le 3-cœur commun est (1) (et le 3-poids commun est 2) :





1. En niveau 1 : partitions
   - Résidus
   - Cœurs
   - Poids
   - Exemple d'application
2. En niveau supérieur : multi-partitions
   - Blocs
   - Poids des blocs cœurs

Poids d'un bloc

Théorème (Fayers 06)

Soit λ une partition. On a

$$\mathrm{w}_e(\lambda) = c_s^s(\lambda) - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \left(c_i^s(\lambda) - c_{i+1}^s(\lambda)\right)^2,$$

où $c_i^s(\lambda)$ désigne le nombre de cases de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de résidu $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.

Poids d'un bloc

Théorème (Fayers 06)

Soit λ une partition. On a

$$\mathrm{w}_e(\lambda) = c_s^s(\lambda) - \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \left(c_i^s(\lambda) - c_{i+1}^s(\lambda)\right)^2,$$

où $c_i^s(\lambda)$ désigne le nombre de cases de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de résidu $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.

Avec la notation précédente on a $\alpha^s(\lambda) = \sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i^s(\lambda)\alpha_i$.

Définition

Le s-**poids** de $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i\alpha_i \in Q$ est

$$\mathrm{w}^s(\alpha) := c_s - \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

Si λ est une partition alors $\mathrm{w}_e(\lambda) = \mathrm{w}^s\big(\alpha^s(\lambda)\big)$.

Blocs comme ensemble de sur-niveau

Lemme (R. 20)

On a
$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ e-cœur}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^s(\alpha) = 0\}.$$

Théorème (R. 20)

On a
$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0\}.$$

Blocs comme ensemble de sur-niveau

Lemme (R. 20)

On a

$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ e-cœur}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^s(\alpha) = 0\}.$$

Théorème (R. 20)

On a

$$\{\alpha^s(\lambda) : \lambda \textit{ partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0\}.$$

Réponse à la question

Étant donné un multi-ensemble d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ (donc un $\alpha \in Q$), il suffit de calculer le poids associé pour déterminer si ce multi-ensemble provient d'une partition.

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \mathrm{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \mathrm{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \operatorname{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

$$\begin{array}{ccc} \boxed{0} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{0} \end{array}$$

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \operatorname{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

$$\begin{array}{|c|c|cc} \hline 0 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} & \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 0 & \multicolumn{1}{c|}{1} & \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \\ \cline{3-3} \end{array}$$

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \mathrm{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 2 \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{} & 0 & 1 \\
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 0 \\
\cline{3-3}
\end{array}$$

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \operatorname{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

$$\begin{array}{cccc}
\boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\
 & \boxed{0} & \boxed{1} & \\
 & & \boxed{0} &
\end{array}$$

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \operatorname{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

0	1	2	3
−1	0	1	
	−1	0	

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \mathrm{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

0	1	2	3
-1	0	1	
-2	-1	0	

Idée de la preuve

Soit $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ vérifiant $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$.

Cas $e > 0$

Via la représentation des partitions sous forme d'**abaque**, on utilise l'existence d'un e-cœur $\overline{\lambda}$ vérifiant $c_i^s(\overline{\lambda}) - c_{i+1}^s(\overline{\lambda}) = c_i - c_{i+1}$.

Si $e = 0$, on montre que nécessairement $c_i - c_{i+1} \in \{0, \operatorname{sgn}(i - s)\}$ ce qui permet de trouver une partition (unique) λ associée.

Exemple (Cas $e = 0$)

Avec $s = 0$, l'élément $\alpha = \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} + 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$ et est obtenu avec la partition

0	1	2	3
−1	0	1	
−2	−1	0	

Remarque (Cas $e = 0$)

Si $\alpha \in Q$ vérifie $\mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0$ alors nécessairement $\mathrm{w}^s(\alpha) = 0$.

1. En niveau 1 : partitions
   - Résidus
   - Cœurs
   - Poids
   - Exemple d'application
2. En niveau supérieur : multi-partitions
   - Blocs
   - Poids des blocs cœurs

Décalage pour les partitions

On suppose $e \geq 2$ et on prend $s = 0$. Pour η un diviseur de e, on considère l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\sigma : Q \to Q$ définie pour $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par $\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+\eta}$.

Problème

Soit λ une partition. A-t-on $\sigma \cdot \alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ pour une certaine partition μ ?

Décalage pour les partitions

On suppose $e \geq 2$ et on prend $s = 0$. Pour η un diviseur de e, on considère l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\sigma : Q \to Q$ définie pour $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par $\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+\eta}$.

Problème

Soit λ une partition. A-t-on $\sigma \cdot \alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ pour une certaine partition μ ?

Remarque

Le problème possède une réponse positive naturelle pour les multi-partitions (dans un bon cadre).

Décalage pour les partitions

On suppose $e \geq 2$ et on prend $s = 0$. Pour η un diviseur de e, on considère l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\sigma : Q \to Q$ définie pour $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par $\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+\eta}$.

Problème

Soit λ une partition. A-t-on $\sigma \cdot \alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ pour une certaine partition μ ?

Remarque

Le problème possède une réponse positive naturelle pour les multi-partitions (dans un bon cadre).

Pour $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ on a $\mathrm{w}(\sigma \cdot \alpha) = \mathrm{w}(\alpha) + c_\eta - c_0$.

Proposition

Le problème précédent possède une réponse positive si et seulement si $c_0(\lambda) \leq c_\eta(\lambda) + \mathrm{w}_e(\lambda)$.

Décalage pour les partitions

On suppose $e \geq 2$ et on prend $s = 0$. Pour η un diviseur de e, on considère l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\sigma : Q \to Q$ définie pour $i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ par $\sigma \cdot \alpha_i := \alpha_{i+\eta}$.

Problème

Soit λ une partition. A-t-on $\sigma \cdot \alpha(\lambda) = \alpha(\mu)$ pour une certaine partition μ ?

Remarque

Le problème possède une réponse positive naturelle pour les multi-partitions (dans un bon cadre).

Pour $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ on a $\mathrm{w}(\sigma \cdot \alpha) = \mathrm{w}(\alpha) + c_\eta - c_0$.

Proposition

Le problème précédent possède une réponse positive si et seulement si $c_0(\lambda) \leq c_\eta(\lambda) + \mathrm{w}_e(\lambda)$.

On peut construire une telle partition μ (de façon non canonique) en utilisant une permutation circulaire du e-**quotient** de λ.

1. En niveau 1 : partitions
   - Résidus
   - Cœurs
   - Poids
   - Exemple d'application

2. En niveau supérieur : multi-partitions
   - Blocs
   - Poids des blocs cœurs

Multi-partitions et leurs multi-ensembles de résidus

Une r-**partition** (ou **multi-partition**) est un r-uplet

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$$

de partitions. Son diagramme de Young $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est la partie de $\mathbb{N}^2 \times \{1, \ldots, r\}$ définie par :

$$(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda}) \iff (a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda^{(j)}).$$

Multi-partitions et leurs multi-ensembles de résidus

Une r-**partition** (ou **multi-partition**) est un r-uplet

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$$

de partitions. Son diagramme de Young $\mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est la partie de $\mathbb{N}^2 \times \{1, \ldots, r\}$ définie par :

$$(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda}) \iff (a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda^{(j)}).$$

Pour $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$, le résidu d'une case $(a, b, j) \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})$ est le résidu de la case $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda^{(j)})$ pour la charge s_j.

Exemple

On prend $e = 3$ et $\boldsymbol{s} = (1, 0)$. Le multi-ensemble de résidus de la bipartition $\big((4, 2, 1), (2, 2, 2, 1)\big)$ est

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 0 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Multi-cœurs et blocs

Définition (Multi-cœur)

Le e-multi-cœur de $\boldsymbol{\lambda}$ est $\overline{\boldsymbol{\lambda}} := (\overline{\lambda}^{(1)}, \dots, \overline{\lambda}^{(r)})$. On dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-**multi-cœur** si $\boldsymbol{\lambda} = \overline{\boldsymbol{\lambda}}$.

Le bloc associé à $\boldsymbol{\lambda}$ est

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} = \sum_{j=1}^{r} \alpha^{s_j}\big(\lambda^{(j)}\big) \in Q.$$

Multi-cœurs et blocs

Définition (Multi-cœur)

Le e-multi-cœur de $\boldsymbol{\lambda}$ est $\overline{\boldsymbol{\lambda}} := (\overline{\lambda}^{(1)}, \ldots, \overline{\lambda}^{(r)})$. On dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-**multi-cœur** si $\boldsymbol{\lambda} = \overline{\boldsymbol{\lambda}}$.

Le bloc associé à $\boldsymbol{\lambda}$ est

$$\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda})} \alpha_{\mathrm{res}(\gamma)} = \sum_{j=1}^{r} \alpha^{s_j}(\lambda^{(j)}) \in Q.$$

Attention : dès que $r > 1$, deux r-partitions peuvent avoir le même bloc associé sans avoir le même multi-cœur.

Exemple

Avec $e = 2$ et $\boldsymbol{s} = (0, 1)$, les bipartitions $((2), \emptyset)$ et $((1), (1))$ ont le même bloc $\alpha_0 + \alpha_1$ associé :

$$\boxed{0}\boxed{1} \quad \emptyset, \qquad\qquad \boxed{0} \quad \boxed{1},$$

mais leurs bicœurs sont $(\emptyset, \emptyset)$ et $((1), (1))$ respectivement.

Reconnaître un bloc

Question

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une multi-partition ?

Reconnaître un bloc

Question

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une multi-partition ?

Pour $e > 0$, on va cette fois montrer un résultat de la forme suivante :

$$Q^{\boldsymbol{s}} := \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) \geq N\}, \quad (\clubsuit)$$

où :

- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}$ généralise la fonction poids sur les multi-partitions (Fayers) ;
- N est une certaine constante ne dépendant pas de la taille des multi-partitions ;

l'ensemble de droite dans $(\clubsuit)$ étant infini.

Reconnaître un bloc

Question

Comment savoir si un multi-ensemble donné d'éléments de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ provient d'une multi-partition ?

Pour $e > 0$, on va cette fois montrer un résultat de la forme suivante :

$$Q^{\boldsymbol{s}} := \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) \geq N\}, \quad (\clubsuit)$$

où :

- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}$ généralise la fonction poids sur les multi-partitions (Fayers) ;
- N est une certaine constante ne dépendant pas de la taille des multi-partitions ;

l'ensemble de droite dans $(\clubsuit)$ étant infini. Nous allons pour cela utiliser la notion de **bloc cœur** (Fayers).

Remarque

L'inlcusion $(\clubsuit)$ est **fausse** quand $e = 0$.

Poids d'une multi-partition

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$.

Définition (Fayers 06)

Le $\boldsymbol{s}$**-poids** de $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ est

$$\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) := \sum_{j=1}^{r} c_{s_j} - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

Le $\boldsymbol{s}$-poids d'une multipartition $\boldsymbol{\lambda}$ est le $\boldsymbol{s}$-poids du bloc $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

Poids d'une multi-partition

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$.

Définition (Fayers 06)

Le ***s*-poids** de $\alpha = \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i \alpha_i \in Q$ est

$$\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) := \sum_{j=1}^{r} c_{s_j} - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

Le $\boldsymbol{s}$-poids d'une multipartition $\boldsymbol{\lambda}$ est le $\boldsymbol{s}$-poids du bloc $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

Proposition (Fayers 06)

Soit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ une r-partition. On a :

- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{1 \leq j < k \leq r} \mathrm{w}^{(s_j, s_k)}(\lambda^{(j)}, \lambda^{(k)})$ *si $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-multi-cœur ;*
- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) \geq 0$.

Poids d'une multi-partition

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}^r$.

Définition (Fayers 06)

Le $\boldsymbol{s}$**-poids** de $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} c_i\alpha_i \in Q$ est

$$\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) := \sum_{j=1}^{r} c_{s_j} - \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} (c_i - c_{i+1})^2 \in \mathbb{Z}.$$

Le $\boldsymbol{s}$-poids d'une multipartition $\boldsymbol{\lambda}$ est le $\boldsymbol{s}$-poids du bloc $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

Proposition (Fayers 06)

Soit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ une r-partition. On a :

- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{1\leq j<k\leq r} \mathrm{w}^{(s_j,s_k)}(\lambda^{(j)}, \lambda^{(k)})$ *si $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-multi-cœur ;*
- $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) \geq 0$.

On obtient notamment $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) \geq r\sum_{j=1}^{r} \mathrm{w}_e(\lambda^{(j)})$.

Blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^{\boldsymbol{s}} = \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une multi-partition. L'ajout (resp. la suppression) d'un e-ruban à $\boldsymbol{\lambda}$ a pour effet d'ajouter (resp. retrancher) δ à $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

En particulier, si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ alors $\alpha + \delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$.

Blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^{\boldsymbol{s}} = \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une multi-partition. L'ajout (resp. la suppression) d'un e-ruban à $\boldsymbol{\lambda}$ a pour effet d'ajouter (resp. retrancher) δ à $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

En particulier, si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ alors $\alpha + \delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$.

Définition (Fayers 07)

On dit que $\alpha \in Q$ est un **bloc cœur** si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ et $\alpha - \delta \notin Q^{\boldsymbol{s}}$.

Blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^{\boldsymbol{s}} = \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une multi-partition. L'ajout (resp. la suppression) d'un e-ruban à $\boldsymbol{\lambda}$ a pour effet d'ajouter (resp. retrancher) δ à $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

En particulier, si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ alors $\alpha + \delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$.

Définition (Fayers 07)

On dit que $\alpha \in Q$ est un **bloc cœur** si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ et $\alpha - \delta \notin Q^{\boldsymbol{s}}$.

Proposition

Si $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ est un bloc cœur alors $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-multi-cœur. Plus précisément, $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ est un bloc cœur si et seulement si toute multi-partition $\boldsymbol{\lambda}$ vérifiant $\alpha^{s}(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha$ est un e-multi-cœur.

Blocs cœurs

On définit $\delta := \sum_{i\in\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \alpha_i \in Q^{\boldsymbol{s}} = \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \text{ multi-partition}\}$.

Proposition

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une multi-partition. L'ajout (resp. la suppression) d'un e-ruban à $\boldsymbol{\lambda}$ a pour effet d'ajouter (resp. retrancher) δ à $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$.

En particulier, si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ alors $\alpha + \delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$.

Définition (Fayers 07)

On dit que $\alpha \in Q$ est un **bloc cœur** si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ et $\alpha - \delta \notin Q^{\boldsymbol{s}}$.

Proposition

Si $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ est un bloc cœur alors $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-multi-cœur. Plus précisément, $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ est un bloc cœur si et seulement si toute multi-partition $\boldsymbol{\lambda}$ vérifiant $\alpha^{s}(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha$ est un e-multi-cœur.

Si $r = 1$ alors $\alpha^{s}(\lambda)$ est un bloc cœur ssi λ est un e-cœur.

Blocs cœurs

Définition (Fayers 07)

On dit que $\alpha \in Q$ est un **bloc cœur** si $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ et $\alpha - \delta \notin Q^{\boldsymbol{s}}$.

Proposition

Si $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ est un bloc cœur alors $\boldsymbol{\lambda}$ est un e-multi-cœur. Plus précisément, $\alpha \in Q^{\boldsymbol{s}}$ est un bloc cœur si et seulement si toute multi-partition $\boldsymbol{\lambda}$ vérifiant $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha$ est un e-multi-cœur.

Si $r = 1$ alors $\alpha^{s}(\lambda)$ est un bloc cœur ssi λ est un e-cœur.

Exemple

Avec $e = 2$ et $\boldsymbol{s} = (0, 1)$, le bloc

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= \alpha^{\boldsymbol{s}}\big((1), (1)\big) \\ &= \alpha^{\boldsymbol{s}}\big((2), \emptyset\big), \end{aligned}$$

n'est pas un bloc cœur.

Poids des blocs cœurs

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} := \max\{\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) : \alpha \in Q^{\boldsymbol{s}} \textit{ bloc cœur et } \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^r\} < \infty.$$

Poids des blocs cœurs

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} := \max\{\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) : \alpha \in Q^{\boldsymbol{s}} \textit{ bloc cœur et } \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^r\} < \infty.$$

Un point essentiel de la démonstration est la description explicite par Fayers des abaques associés aux e-multi-cœurs $\boldsymbol{\lambda}$ tels que $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ est un bloc cœur.

Poids des blocs cœurs

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} := \max\{\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) : \alpha \in Q^{\boldsymbol{s}} \text{ bloc cœur et } \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^r\} < \infty.$$

Un point essentiel de la démonstration est la description explicite par Fayers des abaques associés aux e-multi-cœurs $\boldsymbol{\lambda}$ tels que $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ est un bloc cœur.

Lemme

Pour tout $\alpha \in Q$ *et* $h \in \mathbb{Z}$ *on a* $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha + h\delta) = \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) + rh$.

Proposition (Fayers 07, R. 20)

Soit $\alpha \in Q$. *Il existe* $h \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\alpha + h\delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$. *En particulier, il existe un unique* $h \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\alpha + h\delta$ *est un bloc cœur.*

Poids des blocs cœurs

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} := \max\{\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) : \alpha \in Q^{\boldsymbol{s}} \textit{ bloc cœur et } \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^r\} < \infty.$$

Un point essentiel de la démonstration est la description explicite par Fayers des abaques associés aux e-multi-cœurs $\boldsymbol{\lambda}$ tels que $\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda})$ est un bloc cœur.

Lemme

Pour tout $\alpha \in Q$ et $h \in \mathbb{Z}$ on a $\mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha + h\delta) = \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) + rh$.

Proposition (Fayers 07, R. 20)

Soit $\alpha \in Q$. Il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + h\delta \in Q^{\boldsymbol{s}}$. En particulier, il existe un unique $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + h\delta$ est un bloc cœur.

Corollaire (R. 20)

$$Q^{\boldsymbol{s}} = \{\alpha^{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda} \textit{ multi-partition}\} \supseteq \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^{\boldsymbol{s}}(\alpha) > N_{r,e} - r\}.$$

Poids d'une matrice binaire

La description de Fayers précédente implique qu'il y a une application surjective

$$\bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^r} \{\text{blocs cœurs de } Q^{\boldsymbol{s}}\} \twoheadrightarrow \{\text{matrices binaires } e \times r\}.$$

Soit $\mathcal{E}$ une matrice binaire $e \times r$. On note $E_1, \ldots, E_r$ les sous-ensembles de $\{1, \ldots, e\}$ correspondant aux colonnes de $\mathcal{E}$.

Poids d'une matrice binaire

La description de Fayers précédente implique qu'il y a une application surjective

$$\bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^r} \{\text{blocs cœurs de } Q^{\boldsymbol{s}}\} \twoheadrightarrow \{\text{matrices binaires } e \times r\}.$$

Soit $\mathcal{E}$ une matrice binaire $e \times r$. On note $E_1, \ldots, E_r$ les sous-ensembles de $\{1, \ldots, e\}$ correspondant aux colonnes de $\mathcal{E}$.

Proposition (R. 20)

Les blocs cœurs associés à $\mathcal{E}$ ont pour poids

$$\sum_{1\leq j<k\leq r} \min(|E_j|, |E_k|) - |E_j \cap E_k|.$$

Minoration de $N_{r,e}$

Rappel

$$N_{r,e} = \max_{E_1,\dots,E_r \subseteq \{1,\dots,e\}} \sum_{1 \le j < k \le r} \min(|E_j|, |E_k|) - |E_j \cap E_k|$$

Un calcul explicite montre que $N_{r,2} = \left\lfloor \frac{r^2}{4} \right\rfloor$.

Proposition

La suite $(N_{r,e})_e$ est super-additive : $N_{r,e+e'} \ge N_{r,e} + N_{r,e'}$.

Minoration de $N_{r,e}$

Rappel

$$N_{r,e} = \max_{E_1,\ldots,E_r \subseteq \{1,\ldots,e\}} \sum_{1 \leq j < k \leq r} \min(|E_j|, |E_k|) - |E_j \cap E_k|$$

Un calcul explicite montre que $N_{r,2} = \left\lfloor \frac{r^2}{4} \right\rfloor$.

Proposition

La suite $(N_{r,e})_e$ est super-additive : $N_{r,e+e'} \geq N_{r,e} + N_{r,e'}$.

Corollaire

$$N_{r,e} \geq \left\lfloor \frac{r^2}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor$$

Soit $A_e = (a_{E,F})$ la matrice carrée de taille 2^e de terme général

$$a_{E,F} := \min(|E|, |F|) - |E \cap F|,$$

$E, F \subseteq \{1, \ldots, e\}$, et soit $2q_e$ la forme quadratique associée sur $\mathbb{R}^{2^e}$.

Proposition

$$N_{r,e} = \max_{\substack{x \in \mathbb{N}^{2^e} \\ \|x\|_1 = r}} q_e(x)$$

Majoration de $N_{r,e}$

Soit $A_e = (a_{E,F})$ la matrice carrée de taille 2^e de terme général

$$a_{E,F} := \min(|E|, |F|) - |E \cap F|,$$

$E, F \subseteq \{1, \dots, e\}$, et soit $2q_e$ la forme quadratique associée sur $\mathbb{R}^{2^e}$.

Proposition

$$N_{r,e} = \max_{\substack{x \in \mathbb{N}^{2^e} \\ \|x\|_1 = r}} q_e(x)$$

Pour $k \in \{0, \dots, e\}$, soit $A_{e,k}$ la matrice carrée de taille $\binom{e}{k}$ donnée par $(a_{E,F})$ où $E, F \subseteq \{1, \dots, e\}$ sont de cardinal k et soit $2q_{e,k}$ la forme quadratique associée.

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} = \max_{1 \leq k \leq \lfloor \frac{e}{2} \rfloor} \max_{\substack{x \in \mathbb{N}^{\binom{e}{k}} \\ \|x\|_1 = r}} q_{e,k}(x)$$

Majoration de $N_{r,e}$

Soit $A_e = (a_{E,F})$ la matrice carrée de taille 2^e de terme général

$$a_{E,F} := \min(|E|, |F|) - |E \cap F|,$$

$E, F \subseteq \{1, \ldots, e\}$, et soit $2q_e$ la forme quadratique associée sur $\mathbb{R}^{2^e}$.

Proposition

$$N_{r,e} = \max_{\substack{x \in \mathbb{N}^{2^e} \\ \|x\|_1 = r}} q_e(x)$$

Pour $k \in \{0, \ldots, e\}$, soit $A_{e,k}$ la matrice carrée de taille $\binom{e}{k}$ donnée par $(a_{E,F})$ où $E, F \subseteq \{1, \ldots, e\}$ sont de cardinal k et soit $2q_{e,k}$ la forme quadratique associée.

Théorème (R. 20)

$$N_{r,e} = \max_{1 \le k \le \lfloor \frac{e}{2} \rfloor} \max_{\substack{x \in \mathbb{N}^{\binom{e}{k}} \\ \|x\|_1 = r}} q_{e,k}(x)$$

Corollaire

$$N_{r,e} \le \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor$$

Estimation de $N_{r,e}$

Théorème (R. 20)

$$\left\lfloor \frac{r^2}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor \leq N_{r,e} \leq \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor$$

Corollaire

Si e et r sont pairs alors $N_{r,e} = \frac{er^2}{8}$.

Estimation de $N_{r,e}$

Théorème (R. 20)

$$\left\lfloor \frac{r^2}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor \leq N_{r,e} \leq \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor$$

Corollaire

Si e et r sont pairs alors $N_{r,e} = \frac{er^2}{8}$.

On peut montrer que $N_{r,e}$ atteint la borne supérieure $\left\lfloor \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor \right\rfloor$ quand par exemple $r \in \{2, 4\}$ ou encore quand $e \in \{2, \ldots, 6\}$.

Proposition

Si $(r, e) \in \{(2,2), (2,3), (3,2)\}$ alors

$$Q^s = \{\alpha^s(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\lambda}\ r\text{-partition}\} = \{\alpha \in Q : \mathrm{w}^s(\alpha) \geq 0\}.$$

Fin

Merci de votre attention !

Majoration de $N_{r,e}$

La matrice $A_{e,k} = (a_{E,F})$ est donnée par $a_{E,F} = k - |E \cap F|$ où $E, F \subseteq \{1, \ldots, e\}$ sont de cardinal k.

Lemme

Les valeurs propres de $A_{e,k}$ sont :

- $k\binom{e-1}{k}$ *avec multiplicité* 1 *et le vecteur constant est propre ;*
- 0 *avec multiplicité* $\binom{e}{k} - e$ *;*
- $-\binom{e-2}{k-1}$ *avec multiplicité* $e-1$.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{\binom{e}{k}}$ *on a* $q_{e,k}(x) \leq \frac{\|x\|_1^2}{2e} k(e-k)$.

Corollaire

$$N_{r,e} \leq \frac{r^2}{2e} \left\lfloor \frac{e^2}{4} \right\rfloor .$$