Cellularité de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Salim Rostam
(en commun avec J. Hu et A. Mathas)

Univ Rennes

Séminaire d'algèbre et de géométrie du LMNO
3 mars 2020

Plan

Repérage

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c_{\mathfrak{st}}^{\lambda} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c_{\mathfrak{st}}^{\lambda} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c_{\mathfrak{st}}^{\lambda})^* := c_{\mathfrak{ts}}^{\lambda}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a)$ tels que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$,

$$c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a - \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} \in A^{\rhd \lambda}, \tag{$\clubsuit$}$$

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{st}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $\left(c^\lambda_{\mathfrak{st}}\right)^* := c^\lambda_{\mathfrak{ts}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{tu}}(a)$ tels que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$,

$$c^\lambda_{\mathfrak{st}} a - \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{tu}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{su}} \in A^{\rhd \lambda}, \qquad (\clubsuit)$$

où $A^{\rhd\lambda} := \mathrm{vect}\left\{c^\mu_{\mathfrak{vw}} : \mu \rhd \lambda, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)\right\}$.

Mes premières algèbres cellulaires

Exemple

L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{0, \ldots, n-1\}$;
- $\mathcal{T}(i) := \{i\}$;
- $c^i_{ii} := x^i$.

Mes premières algèbres cellulaires

Exemple

L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{0, \ldots, n-1\}$;
- $\mathcal{T}(i) := \{i\}$;
- $c^i_{ii} := x^i$.

Exemple

L'algèbre $\mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{n\}$ un singleton ;
- $\mathcal{T}(n) := \{1, \ldots, n\}$;
- $c^n_{ij} := E_{ij}$ la matrice élémentaire avec un 1 en position (i,j) et des zéros partout ailleurs.

Proposition

Toute algèbre semi-simple est cellulaire.

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. On rappelle que pour chaque $\lambda \in L$ et $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ on a

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} + A^{\rhd \lambda}$$

dans A.

Modules de Specht

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. On rappelle que pour chaque $\lambda \in L$ et $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ on a

$$c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} + A^{\rhd\lambda}$$

dans A.

Définition (Module de Specht)

Pour chaque $\lambda \in L$, on définit le A-module $\mathcal{S}^\lambda$, dit module *cellulaire* ou de *Specht*, comme le F-module libre de base donnée par des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{t}}$ pour $t \in \mathcal{T}(\lambda)$, l'action de $a \in A$ étant donnée par

$$c^\lambda_{\mathfrak{t}} a := \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{u}}$$

Modules irréductibles

On a une forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathcal{S}^\lambda$ donnée par

$$c^\lambda_{\mathfrak{st}} c^\lambda_{\mathfrak{uv}} = \langle c^\lambda_{\mathfrak{t}}, c^\lambda_{\mathfrak{u}}\rangle c^\lambda_{\mathfrak{sv}} + A^{\rhd\lambda}.$$

Définition

- Pour $\lambda \in L$, on note $\mathcal{D}^\lambda := \mathcal{S}^\lambda/\mathrm{rad}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$.
- On note $L_0 := \{\lambda \in L : \mathcal{D}^\lambda \neq \{0\}\}$.

Proposition (Graham–Lehrer 96)

La famille des $\mathcal{D}^\lambda$ pour $\lambda \in L_0$ est une famille complète de A-modules irréductibles non isomorphes.

Repérage

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexes* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 54)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r, p, n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexes* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 54)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r,p,n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

Remarque

Le groupe $G(r,p,n)$ est isomorphe au groupes des matrices $n \times n$ monomiales à coefficients dans $\mu_r(\mathbb{C})$, dont le produit des coefficients non nuls est une racine $\frac{r}{p}$-ième de l'unité.

Algèbres d'Ariki–Koike

Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$ et $q \in F^\times$.

Définition (Broué–Malle 93, Ariki–Koike 94)

L'*algèbre d'Ariki–Koike* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, 1, n)$.

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est une *déformation* de l'algèbre du groupe $F[G(r, 1, n)]$. En particulier, on a $\mathrm{H}_{r,n}(1) = F[G(r, 1, n)]$.

Remarque

On peut définir de façon « analogue » les algèbres de Hecke pour $G(r, p, n)$. Dans le cas général des groupes de réflexions complexes, la définition, plus géométrique, est due à Broué-Malle-Rouquier.

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et on désigne par $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des *tableaux standards* de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

On a $\boldsymbol{\lambda} := ((4,2,1),(2)) \models_2 9$ et $\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}\;,\; \begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 9 \\ \hline\end{array}\right) \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et on désigne par $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des *tableaux standards* de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

On a $\boldsymbol{\lambda} := ((4,2,1),(2)) \models_2 9$ et $\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array}\right) \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Théorème (Murphy 95, Graham–Lehrer 96, Dipper-James-Mathas 98, Hu–Mathas 10)

On peut trouver une base cellulaire de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ de la forme

$$\{m^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Ordre sur les partitions

Définition

Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \cdots)$ sont deux partitions, on dit que λ *domine* μ et on écrit $\lambda \trianglerighteq \mu$ si pour chaque i

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i.$$

Exemple

$$(4,1) \triangleright (2,2,1), \qquad (3,3) \ntrianglerighteq (4,1,1) \ntrianglerighteq (3,3).$$

Proposition

C'est un ordre partiel sur les partitions, plus fin que l'ordre lexicographique.

Ordre sur les r-partitions

Définition

Si $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ et $\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)})$ sont deux r-partitions, on dit dit que $\boldsymbol{\lambda}$ *domine* $\boldsymbol{\mu}$ et on écrit $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$ si pour chaque i, j,

$$\sum_{k=1}^{j-1} |\lambda^{(k)}| + \lambda_1^{(j)} + \cdots + \lambda_i^{(j)} \geq \sum_{k=1}^{j-1} |\mu^{(k)}| + \mu_1^{(j)} + \cdots + \mu_i^{(j)}.$$

Exemple

$$((3), \varnothing) \triangleright ((1,1),(1)), \quad (\varnothing, (3)) \not\triangleright ((1),(1,1)) \not\triangleright (\varnothing, (3)).$$

Repérage

1. Algèbres cellulaires
2. Algèbres d'Ariki–Koike
3. Cellularité de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Algèbre de Hecke de $G(r,p,n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r,p,n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Que peut-on dire de la cellularité de l'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$?

Remarque

Si $r = p = 2$ ou $[r = p$ et $n = 2]$, cette algèbre est cellulaire par un résultat général de Geck.

Non compatibilité de l'ordre de dominance usuel

Rappelons la propriété de cellularité de la base :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,n}(q), \forall \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} h = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(h) m_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}}^{\boldsymbol{\lambda}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}(h) m_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}^{\boldsymbol{\mu}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Non compatibilité de l'ordre de dominance usuel

Rappelons la propriété de cellularité de la base :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,n}(q), \forall \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} h = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(h) m_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}}^{\boldsymbol{\lambda}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}(h) m_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}^{\boldsymbol{\mu}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Problème 1

Que vaut $\sigma(m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}})$? Est-ce $m_{{}^{\sigma}\mathfrak{s}, {}^{\sigma}\mathfrak{t}}^{{}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}}$? (Non en général.)

Non compatibilité de l'ordre de dominance usuel

Rappelons la propriété de cellularité de la base :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,n}(q), \forall \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} h = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(h) m_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}}^{\boldsymbol{\lambda}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}(h) m_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}^{\boldsymbol{\mu}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Problème 1

Que vaut $\sigma(m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}})$? Est-ce $m_{{}^\sigma\mathfrak{s}, {}^\sigma\mathfrak{t}}^{{}^\sigma\boldsymbol{\lambda}}$? (Non en général.)

Problème 2

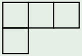
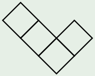
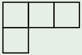
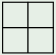
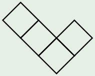
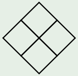
$$\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \not\Rightarrow {}^\sigma\boldsymbol{\mu} \rhd {}^\sigma\boldsymbol{\lambda}$$

Exemple

On a $((3), \varnothing) \rhd ((1,1),(1))$ mais $(\varnothing, (3)) \ntriangleright ((1),(1,1))$ (ni $\ntriangleleft$).

On tourne les diagrammes de Young de 135 degrés !

Exemple

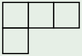
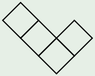
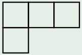
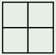
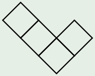
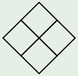
- La partition  devient .
- La bi-partition   devient  .

L'idée est de pouvoir identifier une boîte avec l'abscisse de son coin inférieur.

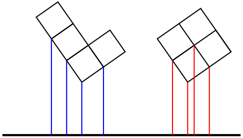
Écriture russe des partitions

On tourne les diagrammes de Young de 135 degrés !

Exemple

- La partition  devient .
- La bi-partition   devient  .

L'idée est de pouvoir identifier une boîte avec l'abscisse de son coin inférieur. On tourne donc de $\epsilon \ll 1$ degrés en moins.



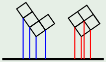
L'ordre sur les (multi-)partitions peut être obtenu à partir de l'ordre sur les boîtes, ces dernières étant identifiées à des réels.

θ-diagrammes

Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ avec $\theta_1 < \cdots < \theta_r$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on la représente comme dans l'écriture russe, mais où l'on prescrit la position $(\theta_i, 0)$ pour la première boîte de la composante i.

Exemple

On considère la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((3,1),(2,2))$.

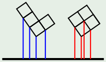
- Si $\theta_1 \ll \theta_2$, on retrouve le diagramme précédent 

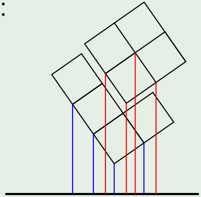
θ-diagrammes

Soit $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ avec $\theta_1 < \cdots < \theta_r$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on la représente comme dans l'écriture russe, mais où l'on prescrit la position $(\theta_i, 0)$ pour la première boîte de la composante i.

Exemple

On considère la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((3,1),(2,2))$.

- Si $\theta_1 \ll \theta_2$, on retrouve le diagramme précédent 
- Si $\theta_1 \approx \theta_2$, on obtient :



On note $\trianglerighteq_\theta$ l'ordre correspondant sur les boîtes, et celui sur les multi-partitions qui s'en déduit.

Cellularités graduées de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

Pour tout θ, on peut trouver une base cellulaire de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ de la forme

$$\{\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\trianglerighteq_\theta$ sur les r-partitions.

Cellularités graduées de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

Pour tout θ, on peut trouver une base cellulaire de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ de la forme

$$\{\psi_{\mathfrak{st}}^{\boldsymbol{\lambda}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\trianglerighteq_\theta$ sur les r-partitions.

Lemme

Si $\theta_1 \approx \cdots \approx \theta_r$ alors σ est croissante pour $\trianglerighteq_\theta$ (ordre « FLOTW ») :

$$\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq_\theta \boldsymbol{\lambda} \implies {}^\sigma\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq_\theta {}^\sigma\boldsymbol{\lambda}.$$

Cellularités graduées de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

Pour tout θ, on peut trouver une base cellulaire de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ de la forme

$$\{\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\trianglerighteq_\theta$ sur les r-partitions.

Lemme

Si $\theta_1 \approx \cdots \approx \theta_r$ alors σ est croissante pour $\trianglerighteq_\theta$ (ordre « FLOTW ») :

$$\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq_\theta \boldsymbol{\lambda} \implies {}^{\sigma}\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq_\theta {}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}.$$

Conjecture (Hu-Mathas-R)

On suppose que θ correspond à l'ordre FLOTW. Alors σ vérifie

$$\sigma(\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}}) = \psi^{{}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}}_{{}^{\sigma}\mathfrak{s},{}^{\sigma}\mathfrak{t}}.$$

Cellularité tordue

Définition (HMR)

Une algèbre A est cellulaire tordue s'il existe un poset $(L, \rhd)$ muni d'une involution croissante ι avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda) \simeq \mathcal{T}(\iota\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{st}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{st}})^* := c^{\iota\lambda}_{\iota\mathfrak{t},\iota\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{tu}}(a)$ tels que :

$$c^\lambda_{\mathfrak{st}} a - \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{tu}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{su}} \in A^{\rhd \lambda}.$$

Les propriétés essentielles du cas cellulaire standard restent vraies, en particulier l'obtention d'une famille complète de simples.

Cellularité tordue de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$

Proposition

Soit A une algèbre cellulaire possédant un automorphisme σ vérifiant

$$\sigma(c^{\lambda}_{\mathfrak{st}}) = c^{\overline{\sigma}\lambda}_{\overline{\sigma}\mathfrak{s},\overline{\sigma}\mathfrak{t}},$$

pour tous $\lambda \in L$ et $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$. Alors la sous-algèbre des points fixes A^{σ} est cellulaire tordue (si $\overline{\sigma}$ se comporte bien).

Pour l'action de σ sur les r-partitions, on note :

- $o_{\boldsymbol{\lambda}}$ le plus petit entier tel que ${}^{\sigma^{o_{\boldsymbol{\lambda}}}}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$, pour chaque $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$;
- Λ un (certain) ensemble de représentants des orbites.

Corollaire

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ est cellulaire tordue, où :

- *$L = \{(\boldsymbol{\lambda}, j) : \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ et $j \in \mathbb{Z}/o_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbb{Z}\}$, muni d'un ordre total raffinant $\trianglerighteq_{\theta}$;*
- *$\mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda}, j) \coloneqq \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\iota(\boldsymbol{\lambda}, j) \coloneqq (\boldsymbol{\lambda}, -j)$.*

Compatibilité avec les classifications existantes

La structure cellulaire tordue fournit une famille complète de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$-modules irréductibles $\{\mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j}\}$ où :

$$\mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j} \neq \{0\} \iff \mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},-j} \neq \{0\}.$$

Il n'est donc pas immédiat que l'équivalence

$$\mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j} \neq \{0\} \iff \mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j+1} \neq \{0\}$$

de classifications existantes (Hu, Genet–Jacon, Hu–Mathas) soit vérifiée.

Fin

Merci de votre attention !