Cellularité de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Salim Rostam

Univ Rennes

Séminaire GRAP 1
18 et 19 septembre 2019

Plan

1. Algèbres cellulaires graduées
2. Algèbres d'Ariki–Koike
3. Cellularité graduée de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Repérage

1. Algèbres cellulaires graduées
2. Algèbres d'Ariki–Koike
3. Cellularité graduée de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a)$ tels que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$,

$$c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a - \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} \in \mathrm{vect}\,\{c^\mu_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}} : \mu \rhd \lambda, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)\}$$

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a)$ tels que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$,

$$c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a - \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} \in \mathrm{vect}\,\{c^\mu_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}} : \mu \rhd \lambda, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)\}$$

On peut alors construire une famille de modules $\{\mathcal{S}^\lambda\}_{\lambda \in L}$ dont certains quotients vont fournir une famille complète de A-modules irréductibles deux à deux non isomorphes.

Mes premières algèbres cellulaires

Exemple

L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{0, \ldots, n-1\}$;
- $\mathcal{T}(i) := \{i\}$;
- $c^i_{ii} := x^i$.

Mes premières algèbres cellulaires

Exemple

L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{0, \ldots, n-1\}$;
- $\mathcal{T}(i) := \{i\}$;
- $c^i_{ii} := x^i$.

Exemple

L'algèbre $\mathrm{Mat}_{n \times n}(F)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{n\}$ un singleton ;
- $\mathcal{T}(n) := \{1, \ldots, n\}$;
- $c^n_{ij} := E_{ij}$ la matrice élémentaire avec un 1 en position (i, j) et des zéros partout ailleurs.

Proposition

Toute algèbre semi-simple est cellulaire.

Algèbres cellulaires graduées

Définition (Hu–Mathas 10)

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. Si l'algèbre A est graduée et que l'on peut étendre la fonction de degré à $\sqcup_{\lambda \in L} \mathcal{T}(\lambda)$ tel que :

$$\deg c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t},$$

on dit que A est cellulaire *graduée*.

Algèbres cellulaires graduées

Définition (Hu–Mathas 10)

Soit $(A, L, \triangleright)$ une algèbre cellulaire. Si l'algèbre A est graduée et que l'on peut étendre la fonction de degré à $\sqcup_{\lambda \in L} \mathcal{T}(\lambda)$ tel que :

$$\deg c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t},$$

on dit que A est cellulaire *graduée*.

Exemples

- L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire graduée avec $\deg i := i$.
- L'algèbre $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(F)$ est cellulaire graduée avec $c^2_{ij} := E_{i,3-j}$ et $\deg i := (-1)^i$.

Repérage

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexe* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 54)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r, p, n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexe* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 54)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r, p, n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

On retrouve les types de Coxeter finis, notamment :

- le type A_n avec $G(1, 1, n)$;
- le type B_n avec $G(2, 1, n)$;
- le type D_n avec $G(2, 2, n)$;
- le type diédral $I_2(n)$ avec $G(n, n, 2)$.

Algèbres d'Ariki–Koike

Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$ et $q \in F^\times$.

Définition (Broué–Malle 93, Ariki–Koike 94)

L'*algèbre d'Ariki–Koike* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, 1, n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

- Si $r = 1$, on retrouve l'algèbre de Iwahori–Hecke de type A.
- Si $r = 2$, on retrouve l'algèbre de Iwahori–Hecke de type B.

Remarque

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est une *déformation* de l'algèbre du groupe $F[G(r, 1, n)]$. En particulier, on a $\mathrm{H}_{r,n}(1) = F[G(r, 1, n)]$.

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et on désigne par $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des *tableaux standards* de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

On a $\boldsymbol{\lambda} := ((4,2,1),(2)) \models_2 9$ et $\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}\;,\; \begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 9 \\ \hline\end{array}\right) \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et on désigne par $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des *tableaux standards* de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

On a $\boldsymbol{\lambda} := ((4,2,1),(2)) \models_2 9$ et $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 9 \\ \hline \end{array} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Théorème (Murphy 95, Dipper-James-Mathas 98)

On peut trouver une base cellulaire de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *de la forme*

$$\{m^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Ordre sur les partitions

Définition

Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \cdots)$ sont deux partitions, on dit que λ *domine* μ et on écrit $\lambda \trianglerighteq \mu$ si pour chaque i

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i.$$

Exemple

$$(4,1) \triangleright (2,2,1), \qquad (3,3) \ntrianglerighteq (4,1,1) \ntrianglerighteq (3,3).$$

Proposition

C'est un ordre partiel sur les partitions, plus fin que l'ordre lexicographique.

Ordre sur les r-partitions

Définition

Si $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ et $\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)})$ sont deux r-partitions, on dit dit que $\boldsymbol{\lambda}$ *domine* $\boldsymbol{\mu}$ et on écrit $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$ si pour chaque i, j,

$$\sum_{k=1}^{j-1} |\lambda^{(k)}| + \lambda_1^{(j)} + \cdots + \lambda_i^{(j)} \geq \sum_{k=1}^{j-1} |\mu^{(k)}| + \mu_1^{(j)} + \cdots + \mu_i^{(j)}.$$

Exemple

$$((3), \varnothing) \triangleright ((1,1),(1)), \quad (\varnothing, (3)) \not\triangleright ((1),(1,1)) \not\triangleright (\varnothing, (3)).$$

Cellularité graduée des algèbres d'Ariki–Koike

Théorème (Rouquier 08, Brundan–Kleshchev 09)

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *est isomorphe à une* algèbre de Hecke carquois cyclotomique, *dont elle hérite de la* $\mathbb{Z}$*-graduation.*

Théorème (Hu–Mathas 10)

On peut trouver une base cellulaire homogène *de* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *de la forme*

$$\{\psi_{\mathfrak{st}}^{\boldsymbol{\lambda}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Remarques

- On a une matrice de passage triangulaire avec la base $\{m_{\mathfrak{st}}^{\boldsymbol{\lambda}}\}$ cellulaire non homogène précédente.
- Quand l'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple, cette base devient une base de matrices élémentaires.

Repérage

1. Algèbres cellulaires graduées
2. Algèbres d'Ariki–Koike
3. Cellularité graduée de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Proposition

- *L'application* $\mathrm{H}_{r,n}(q) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ *donnée par* $\frac{1}{p}(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ *est linéaire surjective.*
- *On a* $\dim \mathrm{H}_{r,p,n}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{r,n}(q)}{p}$.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Proposition

- *L'application* $\mathrm{H}_{r,n}(q) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ *donnée par* $\frac{1}{p}(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ *est linéaire surjective.*
- *On a* $\dim \mathrm{H}_{r,p,n}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{r,n}(q)}{p}$.

Que peut-on dire de la cellularité (graduée) de l'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$?

Remarque

Si $r = p = 2$, on retrouve l'algèbre de Hecke de type D, qui est cellulaire par un résultat général de Geck.

Non compatibilité de l'ordre de dominance usuel

Rappelons la propriété de cellularité de la base de Hu–Mathas :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,n}(q), \forall \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}} h = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{tu}}(h) \psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{su}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r^{\mathfrak{uv}}_{\mathfrak{st}}(h) \psi^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{vw}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Non compatibilité de l'ordre de dominance usuel

Rappelons la propriété de cellularité de la base de Hu–Mathas :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,n}(q), \forall \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}} h = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{tu}}(h) \psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{su}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r^{\mathfrak{uv}}_{\mathfrak{st}}(h) \psi^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{vw}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Problème 1

Que vaut $\sigma(\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}})$? Est-ce $\psi^{{}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}}_{{}^{\sigma}\mathfrak{s}, {}^{\sigma}\mathfrak{t}}$? (Non en général.)

Non compatibilité de l'ordre de dominance usuel

Rappelons la propriété de cellularité de la base de Hu–Mathas :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,n}(q), \forall \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(h) \psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v},\mathfrak{w} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r^{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}(h) \psi^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Problème 1

Que vaut $\sigma(\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})$? Est-ce $\psi^{{}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}}_{{}^{\sigma}\mathfrak{s},{}^{\sigma}\mathfrak{t}}$? (Non en général.)

Problème 2

$$\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \not\Rightarrow {}^{\sigma}\boldsymbol{\mu} \rhd {}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}$$

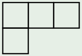
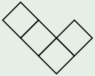
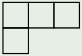
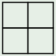
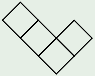
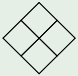
Exemple

On a $((3), \varnothing) \rhd ((1,1),(1))$ mais $(\varnothing, (3)) \not\rhd ((1),(1,1))$ (ni $\not\lhd$).

Écriture russe des partitions

On tourne les diagrammes de Young de 135 degrés !

Exemple

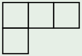
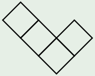
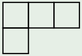
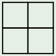
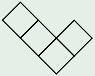
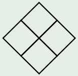
- La partition  devient .
- La bi-partition   devient  .

L'idée est de pouvoir identifier une boîte avec l'abscisse de son coin inférieur.

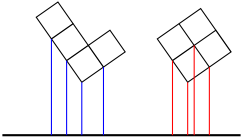
Écriture russe des partitions

On tourne les diagrammes de Young de 135 degrés !

Exemple

- La partition  devient .
- La bi-partition   devient  .

L'idée est de pouvoir identifier une boîte avec l'abscisse de son coin inférieur. On tourne donc de $\epsilon \ll 1$ degrés en moins.



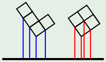
L'ordre sur les (multi-)partitions peut être obtenu à partir de l'ordre sur les boîtes, ces dernières étant identifiées à des réels.

θ-diagrammes

Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ avec $\theta_1 < \cdots < \theta_r$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on la représente comme dans l'écriture russe, mais où l'on prescrit la position $(\theta_i, 0)$ pour la première boîte de la composante i.

Exemple

On considère la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((3,1),(2,2))$.

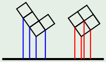
- Si $\theta_1 \ll \theta_2$, on retrouve le diagramme précédent 

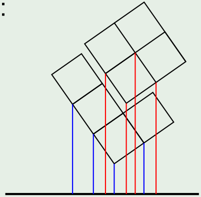
θ-diagrammes

Soit $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ avec $\theta_1 < \cdots < \theta_r$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on la représente comme dans l'écriture russe, mais où l'on prescrit la position $(\theta_i, 0)$ pour la première boîte de la composante i.

Exemple

On considère la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((3,1),(2,2))$.

- Si $\theta_1 \ll \theta_2$, on retrouve le diagramme précédent 
- Si $\theta_1 \approx \theta_2$, on obtient :



On note $\rhd_\theta$ l'ordre correspondant sur les boîtes, et celui sur les multi-partitions qui s'en déduit.

Cellularités graduées de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

On peut trouver une base cellulaire homogène de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *de la forme*

$$\{\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\rhd_\theta$ *sur les* r*-partitions.*

Cellularités graduées de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

On peut trouver une base cellulaire homogène de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ de la forme

$$\{\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\rhd_\theta$ sur les r-partitions.

Lemme

Si $\theta_1 \approx \cdots \approx \theta_r$ alors σ est croissante pour $\rhd_\theta$ (ordre « FLOTW ») :

$$\boldsymbol{\mu} \rhd_\theta \boldsymbol{\lambda} \implies {}^\sigma\boldsymbol{\mu} \rhd_\theta {}^\sigma\boldsymbol{\lambda}.$$

Cellularités graduées de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

On peut trouver une base cellulaire homogène de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *de la forme*

$$\{\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\rhd_\theta$ *sur les* r*-partitions.*

Lemme

Si $\theta_1 \approx \cdots \approx \theta_r$ *alors* σ *est croissante pour* $\rhd_\theta$ *(ordre « FLOTW ») :*

$$\boldsymbol{\mu} \rhd_\theta \boldsymbol{\lambda} \implies {}^\sigma\boldsymbol{\mu} \rhd_\theta {}^\sigma\boldsymbol{\lambda}.$$

Conjecture (Hu-Mathas-R)

On suppose que θ *correspond à l'ordre FLOTW. Alors* σ *vérifie*

$$\sigma(\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = \psi^{{}^\sigma\boldsymbol{\lambda}}_{{}^\sigma\mathfrak{s},{}^\sigma\mathfrak{t}}.$$

Cellularité cubique

Définition (HMR)

Une algèbre A est cellulaire cubique s'il existe un poset $(L, \rhd)$ muni d'une involution croissante ι avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda) \simeq \mathcal{T}(\iota\lambda)$ et des éléments $c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^{\iota\lambda}_{\iota\mathfrak{t},\iota\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a)$ tels que :

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a - \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} \in \mathrm{vect}\,\{c^{\mu}_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}} : \mu \rhd \lambda, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)\}$$

Les propriétés essentielles du cas cellulaire standard restent vraies, en particulier l'obtention d'une famille complète de simples.

Cellularité cubique de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$

En prenant les moyennes sous l'action de $\langle\sigma\rangle$ des éléments $\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}}$, on obtient une base homogène

$$\left\{\overline{\psi}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda},j}\right\}_{\boldsymbol{\lambda},\mathfrak{s},\mathfrak{t},j},$$

de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, où chaque j parcourt un ensemble dépendant du plus petit entier $o_{\boldsymbol{\lambda}}$ tel que ${}^{\sigma^{o_\lambda}}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$.

Cellularité cubique de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$

En prenant les moyennes sous l'action de $\langle\sigma\rangle$ des éléments $\psi_{\mathfrak{st}}^{\boldsymbol{\lambda}}$, on obtient une base homogène

$$\left\{\overline{\psi}_{\mathfrak{st}}^{\boldsymbol{\lambda},j}\right\}_{\boldsymbol{\lambda},\mathfrak{s},\mathfrak{t},j},$$

de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$, où chaque j parcourt un ensemble dépendant du plus petit entier $o_{\boldsymbol{\lambda}}$ tel que ${}^{\sigma^{o_\lambda}}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$.
On construit alors une nouvelle base $\left\{\phi_{\mathfrak{st}}^{\boldsymbol{\lambda},j}\right\}$ en combinant les éléments de la base précédente à la Vandermonde.

Proposition

La famille $\left\{\phi_{\mathfrak{st}}^{\boldsymbol{\lambda},j}\right\}$ de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ est une base cellulaire cubique, où :

- $\mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda},j) \coloneqq \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda})$;
- $\iota(\boldsymbol{\lambda},j) \coloneqq (\boldsymbol{\lambda},-j)$.

Compatibilité avec les classifications existantes

La structure cellulaire cubique fournit une famille complète de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$-modules irréductibles $\{\mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j}\}$ où :

$$\mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j} \neq \{0\} \iff \mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},-j} \neq \{0\}.$$

Il n'est donc pas immédiat que l'équivalence

$$\mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j} \neq \{0\} \iff \mathcal{D}^{\boldsymbol{\lambda},j+1} \neq \{0\}$$

de classifications existantes (Hu, Genet–Jacon, Hu–Mathas) soit vérifiée.

Fin

Merci de votre attention !