Équivalences de Morita entre algèbres de Hecke cyclotomiques

Salim Rostam

Travail en commun avec Loïc Poulain d'Andecy

Univ Rennes

1er mars 2019

Plan

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois
2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Plan de la section

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois
2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Progression

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois

2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Groupe symétrique

Définition

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Pour tout $a \in \{1, \ldots, n-1\}$, on note $t_a := (a, a+1)$.

Groupe symétrique

Définition

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Pour tout $a \in \{1, \ldots, n-1\}$, on note $t_a := (a, a+1)$.

Proposition

On a un isomorphisme

$$\left\langle \tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \tau_a^2 = 1 \\ \tau_a \tau_b = \tau_b \tau_a \text{ si } |a-b| > 1 \\ \tau_a \tau_{a+1} \tau_a = \tau_{a+1} \tau_a \tau_{a+1} \end{array} \right\rangle \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_n$$

où $\tau_a \mapsto t_a$.

Algèbre d'Iwahori–Hecke

Soient K un corps et $q \in K \setminus \{0, \pm 1\}$.

Définition

L'algèbre de groupe $K[\mathfrak{S}_n]$ est la K-algèbre unitaire de présentation

$$K\left\langle T_1, \ldots, T_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} T_a^2 = 1 \\ T_a T_b = T_b T_a \text{ si } |a-b| > 1 \\ T_a T_{a+1} T_a = T_{a+1} T_a T_{a+1} \end{array} \right\rangle.$$

C'est aussi le K-espace vectoriel $\mathrm{vect}_K(e_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ muni de la multiplication $e_\sigma e_{\sigma'} := e_{\sigma\sigma'}$.

Définition

L'*algèbre d'Iwahori–Hecke de type* A, notée $\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}$, est la déformation de l'algèbre de groupe $K[\mathfrak{S}_n] = \langle T_1, \ldots, T_{n-1} \rangle$ obtenue via

$$T_a^2 = 1 \rightsquigarrow (T_a + q^{-1})(T_a - q) = 0.$$

Progression

Algèbre de Hecke cyclotomique

Soit $u = (u_1, \dots, u_r) \in (K^\times)^r$.

Définition (Broué–Malle 93, Ariki–Koike 94)

L'*algèbre de Hecke cyclotomique de type* A, notée $\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}(u)$, est obtenue en ajoutant à l'algèbre $\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}$ d'Iwahori–Hecke de type A un générateur $X_1^{\pm 1}$ vérifiant les relations

$$\begin{aligned} X_1 T_1 X_1 T_1 &= T_1 X_1 T_1 X_1, \\ X_1 T_a &= T_a X_1, \qquad \text{pour tout } a \geq 2, \end{aligned}$$

puis en quotient par la relation

$$\prod_{k=1}^{r} (X_1 - u_k) = 0.$$

L'algèbre $\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}(u)$ est aussi appelée algèbre d'*Ariki–Koike*.

Choix des paramètres cyclotomiques

On regroupe les éléments de u en q^2-orbites distinctes $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(d)})$:

$$u_k^{(j)}/u_{k'}^{(j)} \in \langle q^2 \rangle, \qquad \text{et} \qquad u_k^{(j)}/u_{k'}^{(j')} \notin \langle q^2 \rangle,$$

pour tout $j \neq j'$ et k, k'.

Choix des paramètres cyclotomiques

On regroupe les éléments de u en q^2-orbites distinctes $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$:

$$u_k^{(j)} / u_{k'}^{(j)} \in \langle q^2 \rangle, \qquad \text{et} \qquad u_k^{(j)} / u_{k'}^{(j')} \notin \langle q^2 \rangle,$$

pour tout $j \neq j'$ et k, k'.

Théorème (Dipper–Mathas 02)

L'algèbre d'Ariki–Koike $\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}(u)$ est Morita équivalente à

$$\bigoplus_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_d = n}} \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{H}_{n_j}^{\mathrm{A}}(u^{(j)}).$$

Corollaire

Il suffit d'étudier les algèbres d'Ariki–Koike $\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}(u)$ où $u_k \in \langle q^2 \rangle$ pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$.

Progression

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois

2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Algèbre de Hecke carquois

Soient Γ un carquois d'ensemble de sommets I et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Khovanov–Lauda, Rouquier, 09)

L'*algèbre de Hecke carquois* $\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)$ est l'algèbre engendrée par

$$y_1, \dots, y_n, \qquad \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \qquad e(\boldsymbol{i}), \text{ pour tout } \boldsymbol{i} \in I^n,$$

avec les relations

Algèbre de Hecke carquois

Soient Γ un carquois d'ensemble de sommets I et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Khovanov–Lauda, Rouquier, 09)

L'*algèbre de Hecke carquois* $\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)$ est l'algèbre engendrée par

$$y_1, \dots, y_n, \qquad \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \qquad e(\boldsymbol{i}), \text{ pour tout } \boldsymbol{i} \in I^n,$$

avec les relations

$$\begin{aligned}
e(\boldsymbol{i})e(\boldsymbol{i}') &= \delta_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'} e(\boldsymbol{i}), & y_a e(\boldsymbol{i}) &= e(\boldsymbol{i}) y_a, \\
y_a y_{a'} &= y_{a'} y_a, & \psi_b e(\boldsymbol{i}) &= e(t_b \cdot \boldsymbol{i}) \psi_b, \\
\psi_b y_a &= y_a \psi_b, \qquad \text{si } a \neq b, b+1, \\
\psi_b \psi_{b'} &= \psi_{b'} \psi_b, \qquad \text{si } |b - b'| > 1, \\
\psi_b y_{b+1} e(\boldsymbol{i}) &= (y_b \psi_b + \delta_{i_b, i_{b+1}}) e(\boldsymbol{i}), \\
y_{b+1} \psi_b e(\boldsymbol{i}) &= (\psi_b y_b + \delta_{i_b, i_{b+1}}) e(\boldsymbol{i}), \\
\psi_b^2 e(\boldsymbol{i}) &= Q_{i_b, i_{b+1}}(y_b, y_{b+1}) e(\boldsymbol{i}),
\end{aligned}$$

où $(Q_{ii'})_{i,i' \in I}$ est une certaine famille de polynômes bivariés déterminés par Γ,

Algèbre de Hecke carquois

Définition (suite)

ainsi que

$$(\psi_{c+1}\psi_c\psi_{c+1} - \psi_c\psi_{c+1}\psi_c)\, e(\boldsymbol{i}) \\ = \delta_{i_c,i_{c+2}} \frac{Q_{i_c,i_{c+1}}(y_c, y_{c+1}) - Q_{i_{c+2},i_{c+1}}(y_{c+2}, y_{c+1})}{y_c - y_{c+2}} e(\boldsymbol{i}).$$

Remarque

C'est une algèbre (non trivialement) $\mathbb{Z}$-graduée.

Algèbre de Hecke carquois

Définition (suite)

ainsi que

$$\left(\psi_{c+1}\psi_c\psi_{c+1} - \psi_c\psi_{c+1}\psi_c\right) e(\boldsymbol{i}) \\ = \delta_{i_c, i_{c+2}} \frac{Q_{i_c, i_{c+1}}(y_c, y_{c+1}) - Q_{i_{c+2}, i_{c+1}}(y_{c+2}, y_{c+1})}{y_c - y_{c+2}} e(\boldsymbol{i}).$$

Remarque

C'est une algèbre (non trivialement) $\mathbb{Z}$-graduée.

Pour chaque $w \in \mathfrak{S}_n$, on choisit une expression $w = t_{a_1} \cdots t_{a_k}$ avec k minimal et on pose $\psi_w := \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_k}$.

Théorème (Khovanov–Lauda, Rouquier, 09)

La famille

$$\left\{\psi_w y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} e(\boldsymbol{i}) : w \in \mathfrak{S}_n, a_i \in \mathbb{N}, \boldsymbol{i} \in I^n\right\},$$

est une base de $\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)$.

Algèbre de Hecke carquois cyclotomique

Soit $\Lambda = (\Lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$.

Définition (Khovanov–Lauda, Rouquier, 09)

L'algèbre de Hecke carquois *cyclotomique* $\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)^\Lambda$ est le quotient de $\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)$ par les relations

$$y_1^{\Lambda_{i_1}} e(\boldsymbol{i}) = 0,$$

pour tout $\boldsymbol{i} \in I^n$.

On prend $I := \{\zeta u_k : \zeta \in \langle q^2 \rangle, k \in \{1, \dots, r\}\}$ et Λ_i qui compte les occurrences de $i \in I$ dans u. On note Γ_u le carquois d'ensemble de sommets I et de flèches $s \to q^2 s$.

Algèbre de Hecke carquois cyclotomique

Soit $\Lambda = (\Lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$.

Définition (Khovanov–Lauda, Rouquier, 09)

L'algèbre de Hecke carquois *cyclotomique* $\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)^\Lambda$ est le quotient de $\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)$ par les relations

$$y_1^{\Lambda_{i_1}} e(\boldsymbol{i}) = 0,$$

pour tout $\boldsymbol{i} \in I^n$.

On prend $I := \{\zeta u_k : \zeta \in \langle q^2 \rangle, k \in \{1, \dots, r\}\}$ et Λ_i qui compte les occurrences de $i \in I$ dans u. On note Γ_u le carquois d'ensemble de sommets I et de flèches $s \to q^2 s$.

Théorème (Brundan–Kleshchev, Rouquier, 09)

On a un isomorphisme (explicite)

$$\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}(u) \simeq \mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma_u)^\Lambda.$$

Cas d'un carquois non connexe

Proposition (R. 16)

Si Γ *s'écrit comme une réunion disjointe* $\Gamma = \amalg_{j=1}^{d} \Gamma^{(j)}$ *alors*

$$\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)^{\Lambda} \simeq \bigoplus_{\substack{n_1,\dots,n_d \geq 0 \\ n_1+\dots+n_d = n}} \mathrm{Mat}_{\binom{n}{n_1,\dots,n_d}} \left(\bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{R}_{n_j}^{\mathrm{A}}(\Gamma^{(j)})^{\Lambda^{(j)}} \right),$$

où $\Lambda^{(j)}$ *est la restriction de* Λ *aux sommets de* $\Gamma^{(j)}$*.*

Cas d'un carquois non connexe

Proposition (R. 16)

Si Γ s'écrit comme une réunion disjointe $\Gamma = \amalg_{j=1}^{d} \Gamma^{(j)}$ alors

$$\mathrm{R}_n^{\mathrm{A}}(\Gamma)^{\Lambda} \simeq \bigoplus_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_d=n}} \mathrm{Mat}_{\binom{n}{n_1,\ldots,n_d}} \left(\bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{R}_{n_j}^{\mathrm{A}}(\Gamma^{(j)})^{\Lambda^{(j)}} \right),$$

où $\Lambda^{(j)}$ est la restriction de Λ aux sommets de $\Gamma^{(j)}$.

Corollaire

On prend $u \in (K^{\times})^r$ de la forme $(u^{(1)}, \ldots, u^{(d)})$ précédente. L'équivalence de Morita

$$\mathrm{H}_n^{\mathrm{A}}(u) \overset{\text{Morita}}{\simeq} \bigoplus_{\substack{n_1,\ldots,n_d \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_d=n}} \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{H}_{n_j}^{\mathrm{A}}(u^{(j)}).$$

provient d'un isomorphisme explicite.

Plan de la section

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois
2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Progression

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois
2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Définition

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations σ de $\{1, \dots, n\}$.

On note :

$$t_a := (a, a+1) \quad , \quad \text{pour tout } a \in \{1, \dots, n-1\},$$

Proposition

On a un isomorphisme

$$\left\langle \tau_1 \dots, \tau_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \tau_a^2 = 1 \\ \tau_a \tau_b = \tau_b \tau_a \text{ si } |a-b| > 1 \\ \tau_a \tau_{a+1} \tau_a = \tau_{a+1} \tau_a \tau_{a+1} \end{array} \right\rangle \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_n$$

où $\tau_a \mapsto t_a$.

Groupe symétrique signé

Définition

Le groupe symétrique signé B_n est le groupe des permutations σ de $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$ vérifiant $\sigma(-a) = -\sigma(a)$.

On note :

$$t_a := (a, a+1)(-a, -a-1), \quad \text{pour tout } a \in \{1, \dots, n-1\},$$
$$t_0 := (-1, 1).$$

Proposition

On a un isomorphisme

$$\left\langle \tau_0, \tau_1 \dots, \tau_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \tau_a^2 = 1 \\ \tau_a \tau_b = \tau_b \tau_a \text{ si } |a-b| > 1 \\ \tau_a \tau_{a+1} \tau_a = \tau_{a+1} \tau_a \tau_{a+1} \text{ si } a \geq 1 \\ \tau_0 \tau_1 \tau_0 \tau_1 = \tau_1 \tau_0 \tau_1 \tau_0 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{\sim} B_n$$

où $\tau_a \mapsto t_a$.

Algèbre d'Iwahori–Hecke

Soit $p \in K \setminus \{0\}$.

Définition

L'algèbre de groupe $K[B_n]$ est la K-algèbre unitaire de présentation

$$K\left\langle T_0, \ldots, T_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} T_a^2 = 1 \\ T_a T_b = T_b T_a \text{ si } |a-b| > 1 \\ T_a T_{a+1} T_a = T_{a+1} T_a T_{a+1} \text{ si } a \geq 1 \\ T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0 \end{array} \right\rangle.$$

Définition

L'algèbre d'Iwahori–Hecke de type B, notée $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}$, est la déformation de l'algèbre de groupe $K[B_n] = \langle T_0, \ldots, T_{n-1} \rangle$ obtenue via

$$T_a^2 = 1 \rightsquigarrow (T_a + q^{-1})(T_a - q) = 0, \qquad \text{pour } a \geq 1,$$

$$T_0^2 = 1 \rightsquigarrow (T_0 + p^{-1})(T_0 - p) = 0.$$

Algèbre d'Iwahori–Hecke

Soit $p \in K \setminus \{0\}$.

Définition

L'algèbre de groupe $K[B_n]$ est la K-algèbre unitaire de présentation

$$K\left\langle T_0, \ldots, T_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} T_a^2 = 1 \\ T_a T_b = T_b T_a \text{ si } |a-b| > 1 \\ T_a T_{a+1} T_a = T_{a+1} T_a T_{a+1} \text{ si } a \geq 1 \\ T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0 \end{array} \right\rangle.$$

Définition

L'algèbre d'Iwahori–Hecke de type B, notée $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}$, est la déformation de l'algèbre de groupe $K[B_n] = \langle T_0, \ldots, T_{n-1} \rangle$ obtenue via

$$T_a^2 = 1 \rightsquigarrow (T_a + q^{-1})(T_a - q) = 0, \qquad \text{pour } a \geq 1,$$
$$T_0^2 = 1 \rightsquigarrow (T_0 + p^{-1})(T_0 - p) = 0.$$

C'est un cas particulier d'algèbre d'Ariki–Koike.

Progression

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois
2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Algèbre de Hecke cyclotomique

Soit $u = (u_1, \ldots, u_r) \in (K^\times)^r$.

Définition (Poulain d'Andecy–Walker 17)

L'algèbre de Hecke cyclotomique de type B, notée $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u)$, est obtenue en ajoutant à l'algèbre $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}$ d'Iwahori–Hecke de type B un générateur $X_1^{\pm 1}$ vérifiant les relations

$$\begin{aligned}
T_0 X_1^{-1} T_0 &= X_1, \\
X_1 T_1 X_1 T_1 &= T_1 X_1 T_1 X_1, \\
X_1 T_a &= T_a X_1, && \text{pour tout } a \geq 2,
\end{aligned}$$

puis en quotient par la relation

$$\prod_{k=1}^{r} (X_1 - u_k) = 0.$$

Algèbre de Hecke cyclotomique

Soit $u = (u_1, \ldots, u_r) \in (K^\times)^r$.

Définition (Poulain d'Andecy–Walker 17)

L'algèbre de Hecke cyclotomique de type B, notée $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u)$, est obtenue en ajoutant à l'algèbre $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}$ d'Iwahori–Hecke de type B un générateur $X_1^{\pm 1}$ vérifiant les relations

$$\begin{aligned} T_0 X_1^{-1} T_0 &= X_1, \\ X_1 T_1 X_1 T_1 &= T_1 X_1 T_1 X_1, \\ X_1 T_a &= T_a X_1, && \text{pour tout } a \geq 2, \end{aligned}$$

puis en quotient par la relation

$$\prod_{k=1}^{r} (X_1 - u_k) = 0.$$

On veut s'inspirer de la preuve en type A via les algèbres de Hecke carquois pour donner une équivalence de Morita permettant de restreindre le choix de u.

Progression

Différentes algèbres de Hecke carquois pour le type B

- Lorsque $p^2 \neq 1$, [Varagnolo–Vasserot 11] ont définit une telle algèbre ${}^{\mathrm{VV}}\mathrm{R}_{n}^{\mathrm{B}}(\Gamma, \lambda)$, où Γ est un carquois muni d'une involution *sans* sommet fixe et $\lambda \in \mathbb{N}^{I}$. Leur but était de montrer une conjecture d'Enomoto–Kashiwara sur la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke affine de type B, s'inspirant du type A.

Différentes algèbres de Hecke carquois pour le type B

- Lorsque $p^2 \neq 1$, [Varagnolo–Vasserot 11] ont définit une telle algèbre ${}^{\mathrm{VV}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma, \lambda)$, où Γ est un carquois muni d'une involution *sans* sommet fixe et $\lambda \in \mathbb{N}^I$. Leur but était de montrer une conjecture d'Enomoto–Kashiwara sur la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke affine de type B, s'inspirant du type A.
- Lorsque $p^2 \neq 1$, Poulain d'Andecy–Walker ont défini une algèbre similaire ${}^{\mathrm{PAW}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma)$ dans le cas du carquois Γ_u, où l'inversion est donnée sur les sommets par $s \mapsto s^{-1}$ (possiblement avec des sommets fixes).

Différentes algèbres de Hecke carquois pour le type B

- Lorsque $p^2 \neq 1$, [Varagnolo–Vasserot 11] ont définit une telle algèbre ${}^{\mathrm{VV}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma, \lambda)$, où Γ est un carquois muni d'une involution *sans* sommet fixe et $\lambda \in \mathbb{N}^I$. Leur but était de montrer une conjecture d'Enomoto–Kashiwara sur la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke affine de type B, s'inspirant du type A.
- Lorsque $p^2 \neq 1$, Poulain d'Andecy–Walker ont défini une algèbre similaire ${}^{\mathrm{PAW}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma)$ dans le cas du carquois Γ_u, où l'inversion est donnée sur les sommets par $s \mapsto s^{-1}$ (possiblement avec des sommets fixes).

Théorème (Poulain d'Andecy–Walker 17)

On a un isomorphisme explicite $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u) \simeq {}^{\mathrm{PAW}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma_u)^\wedge$.

Différentes algèbres de Hecke carquois pour le type B

- Lorsque $p^2 \neq 1$, [Varagnolo–Vasserot 11] ont définit une telle algèbre ${}^{\mathrm{VV}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma, \lambda)$, où Γ est un carquois muni d'une involution *sans* sommet fixe et $\lambda \in \mathbb{N}^I$. Leur but était de montrer une conjecture d'Enomoto–Kashiwara sur la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke affine de type B, s'inspirant du type A.
- Lorsque $p^2 \neq 1$, Poulain d'Andecy–Walker ont défini une algèbre similaire ${}^{\mathrm{PAW}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma)$ dans le cas du carquois Γ_u, où l'inversion est donnée sur les sommets par $s \mapsto s^{-1}$ (possiblement avec des sommets fixes).

Théorème (Poulain d'Andecy–Walker 17)

On a un isomorphisme explicite $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u) \simeq {}^{\mathrm{PAW}}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma_u)^{\wedge}$.

- Lorsque $p^2 = 1$, [Poulain d'Andecy–Walker 19] ont étendu leur résultat précédent, en introduisant une *nouvelle* algèbre ${}^{\mathrm{PAW}'}\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma)$, notamment pour traiter le cas du type D.

Une même définition

Avec L. Poulain d'Andecy, nous avons défini une algèbre $\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma, \lambda, \gamma)$ où :

- Γ est un carquois muni d'une involution θ, possiblement avec des sommets fixes ;
- λ est même paramètre que dans la définition de Varagnolo–Vasserot ;
- $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$ est un nouveau paramètre, qui vient remplacer le δ de Kronecker dans certaines relations et vérifie pour tout $i \in I$

$$\theta(i) \neq i \implies \gamma_i = 0.$$

On retrouve les trois algèbres précédentes pour certains choix de Γ, λ et γ.

Est-ce une bonne définition ?

- Cette définition généralise les trois définitions précédentes.
- C'est une algèbre (non trivialement) $\mathbb{Z}$-graduée.

Est-ce une bonne définition ?

- Cette définition généralise les trois définitions précédentes.
- C'est une algèbre (non trivialement) $\mathbb{Z}$-graduée.

Pour chaque $w \in B_n$, on choisit une expression $w = t_{a_1} \cdots t_{a_k}$ avec k minimal et on pose $\psi_w := \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_k}$.

Proposition (Poulain d'Andecy–R. 19)

On suppose que

$$\gamma_i = 0 \implies \theta(i) \neq i \text{ ou } \lambda_i = \lambda_{\theta(i)} = 0,$$

pour tout $i \in I$. La famille

$$\left\{\psi_w y_1^{a_1} \cdots y_n^{a_n} e(\boldsymbol{i}) : w \in B_n, a_i \in \mathbb{N}, \boldsymbol{i} \in I^n\right\},$$

est une base de $\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma, \lambda, \gamma)$.

Progression

1. Théorie en type A
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Algèbre de Hecke carquois
2. Théorie en type B
   - Algèbre d'Iwahori–Hecke
   - Algèbre de Hecke cyclotomique
   - Analogue de l'algèbre de Hecke carquois
   - Équivalence de Morita

Cas d'un carquois non connexe

On suppose que le carquois Γ s'écrit comme une réunion disjointe $\Gamma = \amalg_{j=1}^{d} \Gamma^{(j)}$, où chaque $\Gamma^{(j)}$ est stable par l'involution θ. On note alors $\Lambda^{(j)}$ (resp. $\lambda^{(j)}, \gamma^{(j)}$) est la restriction de Λ (resp. λ, γ) aux sommets de $\Gamma^{(j)}$.

Cas d'un carquois non connexe

On suppose que le carquois Γ s'écrit comme une réunion disjointe $\Gamma = \amalg_{j=1}^{d} \Gamma^{(j)}$, où chaque $\Gamma^{(j)}$ est stable par l'involution θ. On note alors $\Lambda^{(j)}$ (resp. $\lambda^{(j)}, \gamma^{(j)}$) est la restriction de Λ (resp. λ, γ) aux sommets de $\Gamma^{(j)}$.

Proposition (Poulain d'Andecy–R. 19)

On a un isomorphisme (explicite)

$$\mathrm{R}_n^{\mathrm{B}}(\Gamma, \lambda, \gamma)^{\Lambda} \simeq \bigoplus_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_d = n}} \mathrm{Mat}_{\binom{n}{n_1, \dots, n_d}} \left(\bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{R}_{n_j}^{\mathrm{B}}(\Gamma^{(j)}, \lambda^{(j)}, \gamma^{(j)})^{\Lambda^{(j)}} \right).$$

Résultat principal

On suppose que $u \in (K^\times)^r$ est de la forme $(u^{(1)}, \ldots, u^{(d)})$, où chaque $u^{(j)}$ est à valeurs dans un ensemble du type

$$I_{x_j} := \{x_j^\epsilon \zeta : \epsilon \in \{\pm 1\}, \zeta \in \langle q^2 \rangle\},$$

pour $x_j \in K^\times$, où les I_{x_j} sont deux à deux disjoints pour $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Résultat principal

On suppose que $u \in (K^\times)^r$ est de la forme $(u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$, où chaque $u^{(j)}$ est à valeurs dans un ensemble du type

$$I_{x_j} := \{x_j^\epsilon \zeta : \epsilon \in \{\pm 1\}, \zeta \in \langle q^2 \rangle\},$$

pour $x_j \in K^\times$, où les I_{x_j} sont deux à deux disjoints pour $j \in \{1, \dots, d\}$.

Corollaire

On a une équivalence de Morita

$$\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u) \overset{\text{Morita}}{\simeq} \bigoplus_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{H}_{n}^{\mathrm{B}}(u^{(j)}).$$

Résultat principal

On suppose que $u \in (K^\times)^r$ est de la forme $(u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$, où chaque $u^{(j)}$ est à valeurs dans un ensemble du type

$$I_{x_j} := \{x_j^\epsilon \zeta : \epsilon \in \{\pm 1\}, \zeta \in \langle q^2 \rangle\},$$

pour $x_j \in K^\times$, où les I_{x_j} sont deux à deux disjoints pour $j \in \{1, \dots, d\}$.

Corollaire

On a une équivalence de Morita

$$\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u) \overset{Morita}{\simeq} \bigoplus_{\substack{n_1, \dots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_d = n}} \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u^{(j)}).$$

En particulier, il suffit d'étudier $\mathrm{H}_n^{\mathrm{B}}(u)$ pour u à valeurs dans I_x pour un $x \in K^\times$. Il y a en fait quatre classes d'isomorphisme :

$$x = 1, \qquad x = q, \qquad x = p, \qquad x \notin \pm q^{\mathbb{Z}} \cup \pm p^{\pm 1} q^{2\mathbb{Z}}.$$

Fin

Merci de votre attention !