Cellularité de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Salim Rostam

Univ Rennes

Journées du GDR TLAG
31 janvier et 1er février 2019

Plan

Repérage

1. Algèbres cellulaires graduées
2. Algèbres d'Ariki–Koike
3. Cellularité graduée de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$ (I)
4. Cellularité graduée de l'algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$ (II)

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a)$ et $r^{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}(a)$ tels que :

$$\forall \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda), c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} a = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} + \sum_{\substack{\mu \rhd \lambda \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)}} r^{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}(a) c^\mu_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}.$$

Algèbres cellulaires

Soit F un corps et soit A une F-algèbre de dimension finie.

Définition (Graham–Lehrer 96)

On dit que l'algèbre A est *cellulaire* s'il existe un poset $(L, \rhd)$ avec pour chaque $\lambda \in L$ un ensemble d'indices $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in A$ pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tels que :

- l'ensemble $\{c^\lambda_{\mathfrak{st}} : \lambda \in L, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ est une base de A ;
- l'application linéaire $* : A \to A$ donnée par $(c^\lambda_{\mathfrak{st}})^* := c^\lambda_{\mathfrak{ts}}$ est un anti-automorphisme d'algèbre ;
- pour tout $\lambda \in L, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe des scalaires $r_{\mathfrak{tu}}(a)$ et $r^{\mathfrak{vw}}_{\mathfrak{st}}(a)$ tels que :

$$\forall \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda), c^\lambda_{\mathfrak{st}} a = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{tu}}(a) c^\lambda_{\mathfrak{su}} + \sum_{\substack{\mu \rhd \lambda \\ \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\mu)}} r^{\mathfrak{vw}}_{\mathfrak{st}}(a) c^\mu_{\mathfrak{vw}}.$$

On peut alors construire une famille de modules $\{S^\lambda\}_{\lambda \in L}$ dont certains quotients vont fournir une famille complète de A-modules irréductibles deux à deux non isomorphes.

Mes premières algèbres cellulaires

Exemple

L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{0, \ldots, n-1\}$;
- $\mathcal{T}(i) := \{i\}$;
- $c^i_{ii} := x^i$.

Exemple

L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{0, \ldots, n-1\}$;
- $\mathcal{T}(i) := \{i\}$;
- $c^i_{ii} := x^i$.

Exemple

L'algèbre $\mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$ est cellulaire en prenant :

- $L := \{n\}$ un singleton ;
- $\mathcal{T}(n) := \{1, \ldots, n\}$;
- $c^n_{ij} := E_{ij}$ la matrice élémentaire avec un 1 en position (i,j) et des zéros partout ailleurs.

Proposition

Toute algèbre semi-simple est cellulaire.

Algèbres cellulaires graduées

Définition (Hu–Mathas 10)

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. Si l'algèbre A est graduée et que l'on peut étendre la fonction de degré à $\sqcup_{\lambda \in L} \mathcal{T}(\lambda)$ tel que :

$$\deg c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t},$$

on dit que A est cellulaire *graduée*.

Algèbres cellulaires graduées

Définition (Hu–Mathas 10)

Soit $(A, L, \rhd)$ une algèbre cellulaire. Si l'algèbre A est graduée et que l'on peut étendre la fonction de degré à $\sqcup_{\lambda \in L} \mathcal{T}(\lambda)$ tel que :

$$\deg c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t},$$

on dit que A est cellulaire *graduée*.

Exemples

- L'algèbre $F[x]/(x^n)$ est cellulaire graduée avec $\deg i := i$.
- L'algèbre $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(F)$ est cellulaire graduée avec $c_{ij}^2 := E_{i,3-j}$ et $\deg i := (-1)^i$.

Repérage

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexe* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 54)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r,p,n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexe* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Théorème (Shephard–Todd 54)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r, p, n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

On retrouve les types de Coxeter finis, notamment :

- le type A_n avec $G(1, 1, n)$;
- le type B_n avec $G(2, 1, n)$;
- le type D_n avec $G(2, 2, n)$;
- le type diédral $I_2(n)$ avec $G(n, n, 2)$.

Algèbres d'Ariki–Koike

Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$ et $q \in F^\times$.

Définition (Broué–Malle 93, Ariki–Koike 94)

L'*algèbre d'Ariki–Koike* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, 1, n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

- Si $r = 1$, on retrouve l'algèbre de Iwahori–Hecke de type A.
- Si $r = 2$, on retrouve l'algèbre de Iwahori–Hecke de type B.

Remarque

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est une *déformation* de l'algèbre du groupe $F[G(r, 1, n)]$. En particulier, on a $\mathrm{H}_{r,n}(1) = F[G(r, 1, n)]$.

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et on désigne par $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des *tableaux standards* de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

On a $\boldsymbol{\lambda} := ((4,2,1),(2)) \models_2 9$ et $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 9 \\ \hline \end{array} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Cellularité des algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Une *r-partition* de n est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ avec :

- chaque $\lambda^{(i)}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, de somme $|\lambda^{(i)}|$;
- $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$.

On note $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et on désigne par $\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des *tableaux standards* de forme $\boldsymbol{\lambda}$.

Exemple

On a $\boldsymbol{\lambda} := ((4,2,1),(2)) \models_2 9$ et $\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}\;,\;\begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 9 \\ \hline\end{array}\right) \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Théorème (Murphy 95, Dipper-James-Mathas 98)

On peut trouver une base cellulaire de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ de la forme

$$\{m^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Ordre sur les partitions

Définition

Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \cdots)$ sont deux partitions, on dit que λ *domine* μ et on écrit $\lambda \trianglerighteq \mu$ si pour chaque *i*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i.$$

Exemple

$$(4,1) \triangleright (2,2,1), \qquad (3,3) \not\trianglerighteq (4,1,1) \not\trianglerighteq (3,3).$$

Proposition

C'est un ordre partiel sur les partitions, plus fin que l'ordre lexicographique.

Ordre sur les r-partitions

Définition

Si $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ et $\boldsymbol{\mu} = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r)})$ sont deux r-partitions, on dit dit que $\boldsymbol{\lambda}$ *domine* $\boldsymbol{\mu}$ et on écrit $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$ si pour chaque i, j,

$$\sum_{k=1}^{j-1} |\lambda^{(k)}| + \lambda_1^{(j)} + \cdots + \lambda_i^{(j)} \geq \sum_{k=1}^{j-1} |\mu^{(k)}| + \mu_1^{(j)} + \cdots + \mu_i^{(j)}.$$

Exemple

$$((3), \varnothing) \triangleright ((1,1),(1)), \quad (\varnothing, (3)) \not\triangleright ((1),(1,1)) \not\triangleright (\varnothing, (3)).$$

Cellularité graduée des algèbres d'Ariki–Koike

Théorème (Rouquier 08, Brundan–Kleshchev 09)

L'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *est isomorphe à une* algèbre de Hecke carquois cyclotomique, *dont elle hérite de la* $\mathbb{Z}$*-graduation.*

Théorème (Hu–Mathas 10)

On peut trouver une base cellulaire homogène *de* $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ *de la forme*

$$\{\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Remarques

- On a une matrice de passage triangulaire avec la base $\{m^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}\}$ cellulaire non homogène précédente.
- Quand l'algèbre $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple, cette base devient une base de matrices élémentaires.

Compatibilité avec les blocs

À chaque $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ on peut associer un bloc de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$. On dispose en fait d'une application ([Lyle–Mathas 07])

$$\left| \begin{array}{ccc} \{\boldsymbol{\lambda} \models_r n\} & \longrightarrow & \mathbb{N}^e \\ \boldsymbol{\lambda} & \longmapsto & \alpha(\boldsymbol{\lambda}) \end{array} \right.$$

avec e l'ordre de $q \in F^\times$ et

$$\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha(\boldsymbol{\mu}) \text{ \underline{ssi} } \boldsymbol{\lambda} \text{ et } \boldsymbol{\mu} \text{ correspondent au même bloc de } \mathrm{H}_{r,n}(q).$$

Notation

Étant donnés $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^e$, on écrit $\boldsymbol{\lambda} \models_r \alpha$ si $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha$. En particulier, le bloc de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ correspondant à une r-partition $\boldsymbol{\lambda} \models_r \alpha$ est noté $\mathrm{H}_{r,\alpha}(q)$.

Compatibilité avec les blocs

À chaque $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ on peut associer un bloc de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$. On dispose en fait d'une application ([Lyle–Mathas 07])

$$\left|\begin{array}{ccc} \{\boldsymbol{\lambda} \models_r n\} & \longrightarrow & \mathbb{N}^e \\ \boldsymbol{\lambda} & \longmapsto & \alpha(\boldsymbol{\lambda}) \end{array}\right.$$

avec e l'ordre de $q \in F^\times$ et

$\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha(\boldsymbol{\mu})$ <u>ssi</u> $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ correspondent au même bloc de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$.

Notation

Étant donnés $\boldsymbol{\lambda} \models_r n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^e$, on écrit $\boldsymbol{\lambda} \models_r \alpha$ si $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = \alpha$. En particulier, le bloc de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ correspondant à une r-partition $\boldsymbol{\lambda} \models_r \alpha$ est noté $\mathrm{H}_{r,\alpha}(q)$.

Proposition (Hu–Mathas 10)

La famille $\{\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r \alpha$ *et* $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}$ *est une base cellulaire homogène de* $\mathrm{H}_{r,\alpha}(q)$.

Repérage

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Proposition

- *L'application* $\mu : \mathrm{H}_{r,n}(q) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ *donnée par* $\mu := \frac{1}{p}(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ *est une application linéaire surjective.*
- *On a* $\dim \mathrm{H}_{r,p,n}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{r,n}(q)}{p}$.

Algèbre de Hecke de $G(r, p, n)$

Soit $p \mid r$. On peut voir l'algèbre de Hecke du groupe de réflexion complexe $G(r, p, n)$ comme la sous-algèbre de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ fixée par un certain automorphisme d'algèbre σ d'ordre p. On la note $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$.

Proposition

- *L'application* $\mu : \mathrm{H}_{r,n}(q) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ *donnée par* $\mu := \frac{1}{p}(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ *est une application linéaire surjective.*
- *On a* $\dim \mathrm{H}_{r,p,n}(q) = \frac{\dim \mathrm{H}_{r,n}(q)}{p}$.

Que peut-on dire de la cellularité (graduée) de l'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$?

Remarque

Si $r = p = 2$, on retrouve l'algèbre de Hecke de type D, qui est cellulaire par un résultat général de Geck.

Cellularité graduée de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

On considère un bloc $\mathrm{H}_{r,\alpha}(q)$. L'automorphisme σ agit sur les blocs et on note $\mathrm{H}_{r,\sigma\cdot\alpha}(q) \coloneqq \sigma(\mathrm{H}_{r,\alpha}(q))$. Si $[\alpha]$ désigne l'orbite de α sous l'action de σ, l'algèbre suivante est fixée par σ :

$$\mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q) \coloneqq \bigoplus_{i=0}^{\#[\alpha]-1} \mathrm{H}_{r,\sigma^i\cdot\alpha}(q).$$

Définition

On note $\mathrm{H}_{r,p,[\alpha]}(q) \subseteq \mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q)$ la sous-algèbre des points fixes.

Cellularité graduée de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas facile

On considère un bloc $\mathrm{H}_{r,\alpha}(q)$. L'automorphisme σ agit sur les blocs et on note $\mathrm{H}_{r,\sigma\cdot\alpha}(q) \coloneqq \sigma(\mathrm{H}_{r,\alpha}(q))$. Si $[\alpha]$ désigne l'orbite de α sous l'action de σ, l'algèbre suivante est fixée par σ :

$$\mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q) \coloneqq \bigoplus_{i=0}^{\#[\alpha]-1} \mathrm{H}_{r,\sigma^i\cdot\alpha}(q).$$

Définition

On note $\mathrm{H}_{r,p,[\alpha]}(q) \subseteq \mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q)$ la sous-algèbre des points fixes.

Théorème

On suppose que $\#[\alpha] = p$. L'application μ induit un isomorphisme $\mathrm{H}_{r,\alpha}(q) \xrightarrow[\sim]{\mu} \mathrm{H}_{r,p,[\alpha]}(q)$, munissant cette dernière algèbre d'une structure cellulaire graduée.

Corollaire

Si $\operatorname{pgcd}(p,n) = 1$ alors $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ est cellulaire graduée.

Cellularité graduée de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas négatif

Théorème (R. 17)

On suppose que $\#[\alpha] < p$ et que p est impair. L'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,[\alpha]}(q)$ ne possède pas de structure cellulaire graduée naturellement compatible avec celle de $\mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q)$.

Cellularité graduée de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$: cas négatif

Théorème (R. 17)

On suppose que $\#[\alpha] < p$ et que p est impair. L'algèbre $\mathrm{H}_{r,p,[\alpha]}(q)$ ne possède pas de structure cellulaire graduée naturellement compatible avec celle de $\mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q)$.

Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on définit son *décalage* ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}$ par permutation circulaire des composantes. On note $[\boldsymbol{\lambda}]$ son orbite.

Remarque

Le $\mathrm{H}_{r,n}(q)$-module $S^{\boldsymbol{\lambda}}$, où l'action est tordue par σ, est isomorphe au $\mathrm{H}_{r,n}(q)$-module $S^{{}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}}$.

La démonstration du théorème repose sur le lemme combinatoire suivant.

Lemme (R. 17)

$$\#[\alpha] = \max_{\boldsymbol{\lambda} \models_r \alpha} \#[\boldsymbol{\lambda}]$$

Repérage

Non compatibilité de l'ordre de dominance usuel

Remarque

Si $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple alors $\sigma(\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = \psi^{{}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}}_{{}^{\sigma}\mathfrak{s},{}^{\sigma}\mathfrak{t}}$.

Rappelons la propriété de cellularité de la base de Hu–Mathas :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q), \forall \mathfrak{s} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}}(h) \psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v},\mathfrak{w} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r^{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}(h) \psi^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,[\alpha]}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Remarque

Si $\mathrm{H}_{r,n}(q)$ est semi-simple alors $\sigma(\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}}) = \psi^{{}^\sigma\boldsymbol{\lambda}}_{{}^\sigma\mathfrak{s},{}^\sigma\mathfrak{t}}$.

Rappelons la propriété de cellularité de la base de Hu–Mathas :

$$\forall h \in \mathrm{H}_{r,[\alpha]}(q), \forall \mathfrak{s} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}} h = \sum_{\mathfrak{u}\in\mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{tu}}(h)\psi^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{su}} + \sum_{\substack{\boldsymbol{\mu}\rhd\boldsymbol{\lambda} \\ \mathfrak{v},\mathfrak{w}\in\mathrm{Std}(\boldsymbol{\mu})}} r^{\mathfrak{uv}}_{\mathfrak{st}}(h)\psi^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{vw}}.$$

Pour passer à $\mathrm{H}_{r,p,[\alpha]}(q)$, sous-algèbre des points fixes sous σ, on voudrait appliquer σ à l'égalité précédente.

Problème

$$\boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \not\Rightarrow {}^\sigma\boldsymbol{\mu} \rhd {}^\sigma\boldsymbol{\lambda}$$

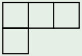
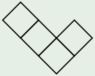
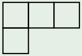
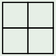
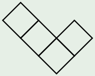
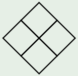
Exemple

On a $((3),\varnothing) \rhd ((1,1),(1))$ mais $(\varnothing,(3)) \not\rhd ((1),(1,1))$ (ni $\not\lhd$).

Écriture russe des partitions

On tourne les diagrammes de Young de 135 degrés !

Exemple

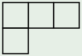
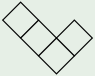
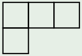
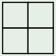
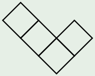
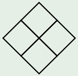
- La partition  devient .
- La bi-partition   devient  .

L'idée est de pouvoir identifier une boîte avec l'abscisse de son coin inférieur.

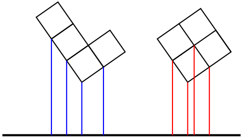
Écriture russe des partitions

On tourne les diagrammes de Young de 135 degrés !

Exemple

- La partition  devient .
- La bi-partition   devient  .

L'idée est de pouvoir identifier une boîte avec l'abscisse de son coin inférieur. On tourne donc de $\epsilon \ll 1$ degrés en moins.



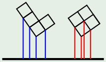
L'ordre sur les (multi-)partitions peut être obtenu à partir de l'ordre sur les nœuds, ces derniers étant identifiés à des réels.

θ-diagrammes

Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ avec $\theta_1 < \cdots < \theta_r$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on la représente comme dans l'écriture russe, mais où l'on prescrit la position $(\theta_i, 0)$ pour la première boîte de la composante i.

Exemple

On considère la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((3,1),(2,2))$.

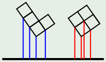
- Si $\theta_1 \ll \theta_2$, on retrouve le diagramme précédent 

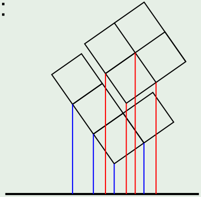
θ-diagrammes

Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ avec $\theta_1 < \cdots < \theta_r$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une r-partition, on la représente comme dans l'écriture russe, mais où l'on prescrit la position $(\theta_i, 0)$ pour la première boîte de la composante i.

Exemple

On considère la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((3,1),(2,2))$.

- Si $\theta_1 \ll \theta_2$, on retrouve le diagramme précédent 
- Si $\theta_1 \approx \theta_2$, on obtient :



On note $\rhd_\theta$ l'ordre correspondant sur les boîtes, et celui sur les multi-partitions qui s'en déduit.

Cellularité graduée $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

On peut trouver une base cellulaire homogène de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$, de la forme

$$\{\psi^{\boldsymbol{\lambda},\theta}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\rhd_\theta$ sur les r-partitions.

Cellularité graduée $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$

Théorème (Webster 13, Bowman 17)

On peut trouver une base cellulaire homogène de $\mathrm{H}_{r,n}(q)$, de la forme

$$\{\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda},\theta} : \boldsymbol{\lambda} \models_r n \text{ et } \mathfrak{s},\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

pour l'ordre $\rhd_\theta$ sur les r-partitions.

Lemme

Si $\theta_1 \simeq \cdots \simeq \theta_r$ alors σ est croissante pour $\rhd_\theta$ (ordre « FLOTW ») :

$$\boldsymbol{\mu} \rhd_\theta \boldsymbol{\lambda} \implies {}^\sigma\boldsymbol{\mu} \rhd_\theta {}^\sigma\boldsymbol{\lambda}.$$

Conjecture (Hu-Mathas-R)

On suppose que θ correspond à l'ordre FLOTW. Alors σ vérifie $\sigma(\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda},\theta}) = \psi_{{}^\sigma\mathfrak{s},{}^\sigma\mathfrak{t}}^{{}^\sigma\boldsymbol{\lambda},\theta}$.

On dispose alors d'une base homogène de $\mathrm{H}_{r,p,n}(q)$ qui vérifie des propriétés semblables à la cellularité.

Fin

Merci de votre attention !