Théorie des représentations des algèbres de Hecke

Salim Rostam

IRMAR, ENS Rennes

16 octobre 2018

Groupe symétrique et algèbre de Hecke de type A

Proposition

Le groupe symétrique possède la présentation par générateurs et relations suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n & \simeq & \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_a t_b = t_b t_a, \ \text{si } |a-b| > 1, \\ t_a t_{a+1} t_a = t_{a+1} t_a t_{a+1}, \\ t_a^2 = 1 \end{array} \right\rangle \\ (a, a+1) & \leftarrow\!\shortmid & t_a \end{array}$$

C'est le *groupe de Coxeter* de type A_{n-1}. On s'intéresse à sa théorie des représentations.

Groupe symétrique et algèbre de Hecke de type A

Proposition

Le groupe symétrique possède la présentation par générateurs et relations suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \simeq & \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_a t_b = t_b t_a, \ \textit{si } |a-b| > 1, \\ t_a t_{a+1} t_a = t_{a+1} t_a t_{a+1}, \\ t_a^2 = 1 \end{array} \right\rangle \\ (a, a+1) & \leftarrow\!\shortmid & t_a \end{array}$$

C'est le *groupe de Coxeter* de type A_{n-1}. On s'intéresse à sa théorie des représentations.

Définition

Soit F un corps et $q \in F^\times$. L'*algèbre de Hecke* de $\mathfrak{S}_n$ est l'algèbre

$$\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n) := F \left\langle T_1, \ldots, T_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} T_a T_b = T_b T_a, \ \text{si } |a-b| > 1, \\ T_a T_{a+1} T_a = T_{a+1} T_a T_{a+1}, \\ T_a^2 = (q-1) T_a + q \end{array} \right\rangle$$

Partitions, diagrammes et tableaux de Young

Définition

Une *partition* de n est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ de somme $n =: |\lambda|$. On note $\lambda \vdash n$.

On peut représenter une partition par son *diagramme de Young* : le diagramme de Young associé à la partition $(3, 2, 2) \vdash 7$ est $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2}\end{array}$.

Définition

Un *tableau de Young standard* est une façon de remplir le diagramme de Young de $\lambda \vdash n$ avec les éléments de $\{1, \ldots, n\}$ de façon croissante sur les colonnes et les lignes. On note $\mathcal{T}(\lambda)$ l'ensemble des tableaux de Young de λ.

Par exemple, on a $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 5 & 7 \\ \cline{1-2}\end{array} \in \mathcal{T}(3, 2, 2)$ mais $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \notin \mathcal{T}(3, 2, 2)$.

Définition

Soient $\lambda, \mu \vdash n$. On écrit $\lambda \trianglerighteq \mu$ si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k.$$

L'ordre $\trianglerighteq$ est un ordre partiel, qui raffine l'ordre lexicographique.

Cellularité de $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$

Définition

Soient $\lambda, \mu \vdash n$. On écrit $\lambda \trianglerighteq \mu$ si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k.$$

L'ordre $\trianglerighteq$ est un ordre partiel, qui raffine l'ordre lexicographique.

Théorème (Murphy 1995)

L'algèbre $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ possède une base de la forme

$$\left\{ c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} : \lambda \vdash n, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda) \right\},$$

avec la propriété suivante :

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} c^{\mu}_{\mathfrak{uv}} = \delta_{\mathfrak{tu}} r_{\mathfrak{tu}} c^{\lambda}_{\mathfrak{sv}} \mod \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)^{\triangleright \lambda}.$$

On dit que $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ est une algèbre *cellulaire*. Cette propriété généralise le fait $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pour les matrices élémentaires. Cela permet de construire les $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$-modules irréductibles.

Algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Le groupe $G(r,1,n) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ est défini par les générateurs $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ et les relations

$$\begin{aligned} t_a t_b &= t_b t_a, \text{ si } |a-b|>1, & st_1st_1 &= t_1st_1s, \\ t_a t_{a+1} t_a &= t_{a+1} t_a t_{a+1}, & st_a &= t_a s, \text{ si } a \geq 2, \\ t_a^2 &= 1, & s^r &= 1. \end{aligned}$$

C'est un groupe de *réflexions complexes*.

Algèbres d'Ariki–Koike

Définition

Le groupe $G(r,1,n) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ est défini par les générateurs $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ et les relations

$$\begin{aligned} t_a t_b &= t_b t_a, \text{ si } |a-b| > 1, & st_1st_1 &= t_1st_1s,\\ t_a t_{a+1} t_a &= t_{a+1} t_a t_{a+1}, & st_a &= t_a s, \text{ si } a \geq 2,\\ t_a^2 &= 1, & s^r &= 1. \end{aligned}$$

C'est un groupe de *réflexions complexes*.

Définition

Soit F un corps et $q \in F^\times$. L'algèbre d'*Ariki–Koike* est la F-algèbre $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$ définie par les générateurs $S, T_1, \ldots, T_{n-1}$ et les relations

$$\begin{aligned} T_a T_b &= T_b T_a, \text{ si } |a-b| > 1, & ST_1ST_1 &= T_1ST_1S,\\ T_a T_{a+1} T_a &= T_{a+1} T_a T_{a+1}, & ST_a &= T_a S, \text{ si } a \geq 2,\\ T_a^2 &= (q-1)T_a + q, & \textstyle\prod_i (S-q^i)^{\Lambda_i} &= 0. \end{aligned}$$

Soit $r := \sum_i \Lambda_i$.

Définition

Une *r-partition* est un r-uplet $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}\right)$ de partitions avec $|\boldsymbol{\lambda}| := |\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$ et on note $\boldsymbol{\lambda} \vdash_r n$.

Un tableau de Young standard pour $\boldsymbol{\lambda} \vdash_r n$ est un r-uplet $(\mathfrak{t}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{t}^{(r)})$ rempli des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ tel que chaque $\mathfrak{t}^{(s)}$ est un tableau de forme $\lambda^{(s)}$ avec les entrées croissantes selon les lignes et les colonnes.

Exemple

On a $\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5 \\ \hline\end{array}\right) \in \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda})$ avec $\boldsymbol{\lambda} := ((2,1),(2)) \vdash_2 5$.

Cellularité de l'algèbre d'Ariki–Koike

On étend $\trianglerighteq$ aux r-partitions de n en écrivant $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$ si $\forall s, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{t=1}^{s-1} |\lambda^{(t)}| + \lambda_1^{(s)} + \cdots + \lambda_k^{(s)} \geq \sum_{t=1}^{s-1} |\mu^{(t)}| + \mu_1^{(s)} + \cdots + \mu_k^{(s)}.$$

Théorème (Dipper-James-Mathas 1998)

L'algèbre $\mathcal{H}_n^{\Lambda}(q)$ possède une base de la forme

$$\left\{ c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} : \boldsymbol{\lambda} \vdash_r n, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda}) \right\},$$

avec la propriété suivante :

$$c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} c_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^{\boldsymbol{\mu}} = \delta_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}} c_{\mathfrak{s}\mathfrak{v}}^{\boldsymbol{\lambda}} \mod \mathcal{H}_n^{\Lambda}(q)^{\triangleright \boldsymbol{\lambda}}.$$

Isomorphisme de Brundan–Kleshchev et Rouquier

Soit $q \in F^\times$ d'ordre fini $e > 2$ et soit $I := \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$.

Théorème (Brundan–Kleshchev, Rouquier 2009)

L'algèbre d'Ariki–Koike $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$ possède la présentation définie par les générateurs

$$y_1, \dots, y_n, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, e(\boldsymbol{i}), \qquad \textit{pour tout } \boldsymbol{i} \in I^n,$$

soumis aux relations

$$e(\boldsymbol{i})e(\boldsymbol{j}) = \delta_{\boldsymbol{ij}} e(\boldsymbol{i}), \qquad \textstyle\sum_{\boldsymbol{i}} e(\boldsymbol{i}) = 1,$$
$$y_a e(\boldsymbol{i}) = e(\boldsymbol{i}) y_a, \qquad \psi_a e(\boldsymbol{i}) = e(s_a \cdot \boldsymbol{i}) \psi_a,$$

$$\begin{aligned}
y_a y_b &= y_b y_a, \\
\psi_a y_b &= y_b \psi_a, \ \textit{si } b \neq a, a+1, \\
\psi_a \psi_b &= \psi_b \psi_a, \ \textit{si } |a-b| > 1, \\
\psi_a y_{a+1} e(\boldsymbol{i}) &= (y_a \psi_a + \delta_{i_a, i_{a+1}}) e(\boldsymbol{i}), \\
y_{a+1} \psi_a e(\boldsymbol{i}) &= (\psi_a y_a + \delta_{i_a, i_{a+1}}) e(\boldsymbol{i}), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Isomorphisme de Brundan–Kleshchev et Rouquier

$$\vdots$$

$$\psi_a^2 e(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} 0, & \text{si } i_a = i_{a+1}, \\ (y_{a+1} - y_a)e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_a = i_{a+1} - 1, \\ (y_a - y_{a+1})e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_a = i_{a+1} + 1, \\ e(\boldsymbol{i}), & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\psi_a \psi_{a+1} \psi_a e(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} (\psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1} + 1)e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_{a+2} = i_a = i_{a+1} - 1, \\ (\psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1} - 1)e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_{a+2} = i_a = i_{a+1} + 1, \\ \psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1} e(\boldsymbol{i}), & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$y_1^{\Lambda_{i_1}} e(\boldsymbol{i}) = 0.$$

$$\vdots$$

$$\psi_a^2 e(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} 0, & \text{si } i_a = i_{a+1}, \\ (y_{a+1} - y_a)e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_a = i_{a+1} - 1, \\ (y_a - y_{a+1})e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_a = i_{a+1} + 1, \\ e(\boldsymbol{i}), & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\psi_a \psi_{a+1} \psi_a e(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} (\psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1} + 1)e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_{a+2} = i_a = i_{a+1} - 1, \\ (\psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1} - 1)e(\boldsymbol{i}), & \text{si } i_{a+2} = i_a = i_{a+1} + 1, \\ \psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1} e(\boldsymbol{i}), & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$y_1^{\Lambda_{i_1}} e(\boldsymbol{i}) = 0.$$

L'algèbre $\mathcal{H}_n^{\Lambda}(q)$ est alors graduée par $\deg e(\boldsymbol{i}) = 0$, $\deg y_a = 2$ et

$$\deg \psi_a e(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} -2, & \text{si } i_a = i_{a+1}, \\ 1, & \text{si } i_a = i_{a+1} \pm 1, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Corollaires

Corollaire

Si $q' \in F^\times$ *a le même ordre que* q *alors* $\mathcal{H}_n^\Lambda(q) \simeq \mathcal{H}_n^\Lambda(q')$.

Corollaires

Corollaire

Si $q' \in F^\times$ a le même ordre que q alors $\mathcal{H}_n^\Lambda(q) \simeq \mathcal{H}_n^\Lambda(q')$.

Soit $p \mid r$. Le groupe de réflexions complexe $G(r,1,n)$ possède un sous-groupe $G(r,p,n)$ d'indice p, qui est également un groupe de réflexions complexes. Au niveau de l'algèbre d'Ariki–Koike $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$, on a une sous-algèbre $\mathcal{H}_{p,n}^\Lambda(q)$ d'indice p.

Exemple

Si $r = p = 2$ alors $G(2,2,n)$ est le groupe diédral.

Corollaires

Corollaire

Si $q' \in F^\times$ a le même ordre que q alors $\mathcal{H}_n^\Lambda(q) \simeq \mathcal{H}_n^\Lambda(q')$.

Soit $p \mid r$. Le groupe de réflexions complexe $G(r, 1, n)$ possède un sous-groupe $G(r, p, n)$ d'indice p, qui est également un groupe de réflexions complexes. Au niveau de l'algèbre d'Ariki–Koike $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$, on a une sous-algèbre $\mathcal{H}_{p,n}^\Lambda(q)$ d'indice p.

Exemple

Si $r = p = 2$ alors $G(2, 2, n)$ est le groupe diédral.

Théorème (R. 2016)

L'isomorphisme précédent peut s'adapter pour la sous-algèbre $\mathcal{H}_{p,n}^\Lambda(q)$. En particulier, on peut en donner une présentation $\mathbb{Z}$-graduée et elle ne dépend de q que par son ordre.

Définition

Soit $\boldsymbol{\lambda} \vdash_r n$. On dit qu'une boîte du diagramme de Young de $\boldsymbol{\lambda}$ est *en-dessous* d'une autre si c'est le cas quand on écrit les composantes de $\boldsymbol{\lambda}$ les unes en dessous des autres.

Il existe une fonction deg : $\mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda}) \to \mathbb{Z}$ telle pour pour $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda})$, l'entier $\deg \mathfrak{t}$ dépend de l'ordre sur les boîtes dans les tableaux $\mathfrak{t}{\downarrow_1}, \mathfrak{t}{\downarrow_2}, \dots, \mathfrak{t}{\downarrow_n} = \mathfrak{t}$.

Définition

Soit $\boldsymbol{\lambda} \vdash_r n$. On dit qu'une boîte du diagramme de Young de $\boldsymbol{\lambda}$ est *en-dessous* d'une autre si c'est le cas quand on écrit les composantes de $\boldsymbol{\lambda}$ les unes en dessous des autres.

Il existe une fonction $\deg : \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda}) \to \mathbb{Z}$ telle pour pour $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda})$, l'entier $\deg \mathfrak{t}$ dépend de l'ordre sur les boîtes dans les tableaux $\mathfrak{t}{\downarrow_1}, \mathfrak{t}{\downarrow_2}, \dots, \mathfrak{t}{\downarrow_n} = \mathfrak{t}$.

Théorème (Hu–Mathas 2010)

L'algèbre $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$ possède une base homogène de la forme

$$\left\{\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} : \boldsymbol{\lambda} \vdash_r n, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{\lambda})\right\},$$

avec les propriétés suivantes :

$$\psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} \psi_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^{\boldsymbol{\mu}} = \delta_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}} r_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}} \psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{v}}^{\boldsymbol{\lambda}} \mod \mathcal{H}_n^\Lambda(q)^{\rhd \boldsymbol{\lambda}},$$

$$\deg \psi_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} = \deg \mathfrak{s} + \deg \mathfrak{t}.$$