Quelques aspects combinatoires de théorie des représentations des algèbres de Hecke

Salim Rostam

Laboratoire de mathématiques de Versailles UVSQ
ENS Rennes

11 octobre 2018

Journée de rentrée de l'EDMH

Représentations d'un groupe fini

Soit G un groupe fini et k un corps.

Définition

Une *représentation* de G est la donnée d'une application

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_N(k)$$

qui vérifie :

- $\rho(1_G) = \mathrm{Id}_N$;
- $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$ pour tout $g, g' \in G$

On dit que N est la *dimension* de la représentation.

Exemple

L'application $\rho_{\mathrm{triv}} : G \to \mathrm{GL}_1(k) \simeq k^\times$ donnée par $\rho(g) := 1$ pour tout $g \in G$ est une représentation de dimension 1.

Algèbre de groupe

Soit $k[G]$ le k-espace vectoriel de base $\{e_g : g \in G\}$. On le munit d'une structure d'algèbre en posant

$$e_g \cdot e_{g'} := e_{gg'}$$

pour tout $g, g' \in G$. C'est l'*algèbre de groupe* de G.

Proposition

L'application $G \to \mathrm{GL}_{\#G}(k)$ induite par

$$g \mapsto \textit{multiplication à gauche par } e_g \textit{ dans } k[G],$$

est une représentation de G.

Cette représentation est la *représentation régulière* de G.

Décomposition en représentations irréductibles

Une classe importante de représentations est celle des représentations qui sont *irréductibles*.

Proposition (Maschke)

Toutes les représentations de G s'expriment en fonction des représentations irréductibles si et seulement si la caractéristique de k ne divise pas $\#G$.

Remarque

- Si k est de caractéristique 0 (par exemple $k = \mathbb{C}$) il n'y a pas de souci.
- Si k est de caractéristique un nombre premier p (par exemple $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), méfiance !

Groupe symétrique

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ muni de la composition.

On va s'intéresser aux représentations du groupe symétrique. De façon générale, on a la représentation triviale ainsi que la représentation régulière définies précédemment.

Exemple

- La signature $\epsilon : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_1(k) \simeq k^\times$ est la seule représentation non triviale de dimension 1.
- La *représentation de permutation* $P : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(k)$, où $P^\sigma = (p^\sigma_{i,j})$ est la matrice de permutation associée à σ, donnée par $p^\sigma_{i,j} := \delta_{i,\sigma(j)}$.

Partitions, diagrammes de Young et tableaux de Young

Définition

Une *partition* d'un entier n, notée $\lambda \vdash n$, est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ d'entiers strictement positifs de somme $n =: |\lambda|$.

Exemple

Les suites $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(5, 1)$ et (6) sont des partitions de 6.

Partitions, diagrammes de Young et tableaux de Young

Définition

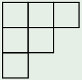
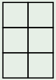
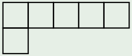
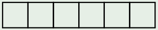
Une *partition* d'un entier n, notée $\lambda \vdash n$, est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ d'entiers strictement positifs de somme $n =: |\lambda|$.

Exemple

Les suites $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(5, 1)$ et (6) sont des partitions de 6.

On peut représenter une partition avec son *diagramme de Young*.

Exemple

Les diagrammes de Young associés aux partitions précédentes sont respectivement , ,  et .

Partitions, diagrammes de Young et tableaux de Young

Définition

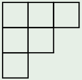
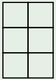
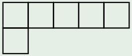
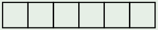
Une *partition* d'un entier n, notée $\lambda \vdash n$, est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ d'entiers strictement positifs de somme $n =: |\lambda|$.

Exemple

Les suites $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(5, 1)$ et (6) sont des partitions de 6.

On peut représenter une partition avec son *diagramme de Young*.

Exemple

Les diagrammes de Young associés aux partitions précédentes sont respectivement , ,  et .

Un *tableau de Young* de type $\lambda \vdash n$ est une numérotation des cases du diagramme de Young de λ par les entiers de $\{1, \ldots, n\}$. Par exemple, $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 5 \\ \hline 3 & 2 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$ est un tableau de Young de type $(3, 2, 1)$.

Paramétrage des représentations complexes irréductibles

Proposition

Les partitions de n paramètrent les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_n$.

Cette proposition résulte des propriétés de la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints.

Paramétrage des représentations complexes irréductibles

Proposition

Les partitions de n paramètrent les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_n$.

Cette proposition résulte des propriétés de la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints.

Corollaire

Il y a autant de représentations complexes irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ que de partitions de n.

On peut donc noter $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ l'ensemble des représentations irréductibles complexes de $\mathfrak{S}_n$.

Définition

Un tableau de Young de forme $\lambda \vdash n$ est *standard* si l'indexation est croissante suivant les lignes (de gauche à droite) et les colonnes (de haut en bas).

Exemple

Les tableaux de Young standard de forme $(3,2)$ sont :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}\,.$$

Dimension des représentations complexes irréductibles

Définition

Un tableau de Young de forme $\lambda \vdash n$ est *standard* si l'indexation est croissante suivant les lignes (de gauche à droite) et les colonnes (de haut en bas).

Exemple

Les tableaux de Young standard de forme $(3, 2)$ sont :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}\,.$$

Une façon de construire la représentation irréductible ρ_λ est de définir un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V_λ de base indexée par les tableaux de Young standards de forme λ, puis de définir un certain morphisme $\rho_\lambda : G \to \mathrm{GL}(V_\lambda) \simeq \mathrm{GL}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$. La dimension d_λ de ρ_λ est alors le nombre de ces tableaux. Par exemple, on a $\dim \rho_{(3,2)} = 5$.

Dimension des représentations complexes irréductibles

Définition

Un tableau de Young de forme $\lambda \vdash n$ est *standard* si l'indexation est croissante suivant les lignes (de gauche à droite) et les colonnes (de haut en bas).

Exemple

Les tableaux de Young standard de forme $(3, 2)$ sont :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}\,.$$

Une façon de construire la représentation irréductible ρ_λ est de définir un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V_λ de base indexée par les tableaux de Young standards de forme λ, puis de définir un certain morphisme $\rho_\lambda : G \to \mathrm{GL}(V_\lambda) \simeq \mathrm{GL}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$. La dimension d_λ de ρ_λ est alors le nombre de ces tableaux. Par exemple, on a $\dim \rho_{(3,2)} = 5$.

Exercice

Calculer $\dim \rho_{(3,3,2)}$.

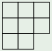
Formule de la longueur des crochets

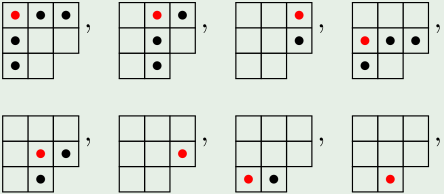
Théorème (« *Hook length formula* », Frame-Robinson-Thrall 1954)

Soit $\lambda \vdash n$. On a

$$\dim \rho_\lambda = \frac{n!}{\prod_{h \text{ crochet de } \lambda} \# h}.$$

Exemple (Réponse à l'exercice précédent)

Les huit crochets de la partition $(3,3,2) =$  sont



donc $\dim \rho_{(3,3,2)} = \frac{8!}{5\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 42.$ (!)

Pour la partition $(3,2)$ on retrouve bien $\dim \rho_{(3,2)} = \frac{5!}{4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 5.$

Représentations modulaires : algèbre de Hecke de type A

On s'intéresse maintenant aux représentations de $\mathfrak{S}_n$ à coefficients dans un corps k de caractéristique un nombre premier p. Par le théorème de Maschke, dès que $n \geq p$ on ne pourra plus utiliser les représentations irréductibles pour exprimer les représentations.

Nouvelle brique de base

On remplace les représentations irréductibles par les *blocs*.

Représentations modulaires : algèbre de Hecke de type A

On s'intéresse maintenant aux représentations de $\mathfrak{S}_n$ à coefficients dans un corps k de caractéristique un nombre premier p. Par le théorème de Maschke, dès que $n \geq p$ on ne pourra plus utiliser les représentations irréductibles pour exprimer les représentations.

Nouvelle brique de base

On remplace les représentations irréductibles par les *blocs*.

On va en fait regarder les blocs de l'*algèbre de Hecke* $\mathcal{H}_n^{\mathrm{A}}(q)$ de $\mathfrak{S}_n$, où $q \in \mathbb{C}^\times$ est une racine de l'unité. L'idée est que le cas où q est une racine p-ième de l'unité ressemble au cas que l'on veut étudier.

Représentations modulaires : algèbre de Hecke de type A

On s'intéresse maintenant aux représentations de $\mathfrak{S}_n$ à coefficients dans un corps k de caractéristique un nombre premier p. Par le théorème de Maschke, dès que $n \geq p$ on ne pourra plus utiliser les représentations irréductibles pour exprimer les représentations.

Nouvelle brique de base

On remplace les représentations irréductibles par les *blocs*.

On va en fait regarder les blocs de l'*algèbre de Hecke* $\mathcal{H}_n^{\mathrm{A}}(q)$ de $\mathfrak{S}_n$, où $q \in \mathbb{C}^\times$ est une racine de l'unité. L'idée est que le cas où q est une racine p-ième de l'unité ressemble au cas que l'on veut étudier.

Remarque

L'algèbre $\mathcal{H}_n^{\mathrm{A}}(q)$ peut être construite comme une *déformation* de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, en particulier

$$\dim \mathcal{H}_n^{\mathrm{A}}(q) = \dim \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n],$$

$$\mathcal{H}_n^{\mathrm{A}}(1) = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n].$$

Dans la suite, on notera $e \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ l'ordre de $q \in \mathbb{C}^\times$.

Bloc associé à une partition

Prenons l'exemple de la partition $\lambda := (6, 3, 3)$. On remplit son diagramme de Young de la façon suivante :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -1 & 0 & 1 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} -2 & -1 & 0 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} \end{array}$$

et on réduit modulo e. Par exemple, on obtient $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 0 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} \end{array}$ pour $e = 4$.

Bloc associé à une partition

Prenons l'exemple de la partition $\lambda := (6,3,3)$. On remplit son diagramme de Young de la façon suivante :

0	1	2	3	4	5
-1	0	1			
-2	-1	0			

et on réduit modulo e. Par exemple, on obtient

0	1	2	3	0	1
3	0	1			
2	3	0			

pour $e = 4$.

Définition

Le *bloc* associé à une partition est le vecteur $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{e-1})$ tel que α_i est le nombre de i dans le diagramme modulo e obtenu en suivant la procédure décrite ci-dessus.

Exemple

Le bloc associé à la partition λ précédente est $\alpha = (4,3,2,3)$. C'est aussi le bloc associé à la partition $(5,3,3,1)$.

Permutations signées

On s'intéresse au sous-groupe W_n des permutations σ de $\{-n, \ldots, n\}$ qui vérifient $\sigma(-i) = -\sigma(i)$. On dit que σ est une permutation *signée*. On peut voir W_n comme le groupe des matrices de permutation où les coefficients non nuls sont dans $\{\pm 1\}$.

Proposition

Le groupe W_n des permutations signées est isomorphe à

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n,$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ par permutation des coordonnées.

Permutations signées

On s'intéresse au sous-groupe W_n des permutations σ de $\{-n, \ldots, n\}$ qui vérifient $\sigma(-i) = -\sigma(i)$. On dit que σ est une permutation *signée*. On peut voir W_n comme le groupe des matrices de permutation où les coefficients non nuls sont dans $\{\pm 1\}$.

Proposition

Le groupe W_n des permutations signées est isomorphe à

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n,$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ par permutation des coordonnées.

Proposition–Définition

Les classes de conjugaison de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n$ sont paramétrées par les bi-partitions de n, c'est-à-dire, les couples (λ, μ) de partitions avec $|\lambda| + |\mu| = n$. En particulier, les bi-partitions de n paramètrent les représentations complexes irréductibles de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n$.

Blocs de l'algèbre de Hecke de type B

Comme tout à l'heure, on remplace l'étude de la théorie des représentations de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n$ par celle de son algèbre de Hecke, maintenant notée $\mathcal{H}_n^{\mathrm{B}}(q)$, où $q \in \mathbb{C}^\times$ est une racine e-ième de l'unité. L'algèbre $\mathcal{H}_n^{\mathrm{B}}(q)$ est une déformation de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n]$.

On s'intéresse au cas où l'ordre e de $q \in \mathbb{C}^\times$ est pair.

Blocs de l'algèbre de Hecke de type B

Comme tout à l'heure, on remplace l'étude de la théorie des représentations de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n$ par celle de son algèbre de Hecke, maintenant notée $\mathcal{H}_n^{\mathrm{B}}(q)$, où $q \in \mathbb{C}^\times$ est une racine e-ième de l'unité. L'algèbre $\mathcal{H}_n^{\mathrm{B}}(q)$ est une déformation de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n]$.

On s'intéresse au cas où l'ordre e de $q \in \mathbb{C}^\times$ est pair.

À chaque bi-partition on va associer un bloc $\alpha \in \mathbb{N}^e$ de $\mathcal{H}_n^{\mathrm{B}}(q)$. On fait la même procédure que précédemment, mais on commence le remplissage du second diagramme de Young par $\frac{e}{2}$ et non par 0.

Exemple

Avec la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} := ((4,2),(3,3))$ et $e = 6$, on obtient

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

et le bloc associé est donc $\alpha = (2,1,2,3,2,2)$.

Opération de décalage

On vient de voir que le bloc associé à la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} = \big((4,2),(3,3)\big)$ est $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = (2,1,2,3,2,2)$. Si l'on calcule le bloc associé à la bi-partition « miroir » ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} := \big((3,3),(4,2)\big)$, on trouve

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

donc $\alpha({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = (3,2,2,2,1,2)$.

Opération de décalage

On vient de voir que le bloc associé à la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} = ((4,2),(3,3))$ est $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = (2,1,2,3,2,2)$. Si l'on calcule le bloc associé à la bi-partition « miroir » ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} := ((3,3),(4,2))$, on trouve

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

donc $\alpha({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = (3,2,2,2,1,2)$. C'est un fait général :

Proposition–Définition

Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une bi-partition et $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1}) \in \mathbb{N}^e$ est son bloc associé alors

$$\alpha({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = \left(\alpha_{\frac{e}{2}}, \dots, \alpha_{e-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{\frac{e}{2}-1}\right) =: \sigma \cdot \alpha.$$

Ainsi, si ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$ alors $\sigma \cdot \alpha = \alpha$.

Opération de décalage

On vient de voir que le bloc associé à la bi-partition $\boldsymbol{\lambda} = ((4,2),(3,3))$ est $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = (2,1,2,3,2,2)$. Si l'on calcule le bloc associé à la bi-partition « miroir » ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} := ((3,3),(4,2))$, on trouve

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

donc $\alpha({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = (3,2,2,2,1,2)$. C'est un fait général :

Proposition–Définition

Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une bi-partition et $\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1}) \in \mathbb{N}^e$ est son bloc associé alors

$$\alpha({}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda}) = \left(\alpha_{\frac{e}{2}}, \dots, \alpha_{e-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{\frac{e}{2}-1}\right) =: \sigma \cdot \alpha.$$

Ainsi, si ${}^{\sigma}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$ alors $\sigma \cdot \alpha = \alpha$. Que dire de la réciproque ?

Blocs bégayants

Théorème (R.)

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une bi-partition et soit $\alpha := \alpha(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{N}^e$ son bloc associé. Si $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ alors il existe une partition μ telle que $\alpha = \alpha(\mu, \mu)$.

On reprend $e = 6$. Pour la bi-partition $((1,1),(3,2,2,1))$ on a

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1} \end{array},$$

donc le bloc associé est $\alpha = (2,1,2,2,1,2)$. On a $\sigma \cdot \alpha = \alpha$, et en effet $\alpha = \alpha(\mu, \mu)$ où $\mu = (4,1)$ puisque pour la bi-partition (μ, μ) on a

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 & 0 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Groupes de réflexions complexes

Définition

- Une *réflexion complexe* est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, différent de l'identité, fixant un hyperplan et d'ordre fini.
- Un *groupe de réflexions complexes* est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, on définit les réflexions *réelles*. L'ordre d'une telle réflexion est nécessairement 2, et les groupes de réflexions réelles sont exactement les *groupes de Coxeter finis*.

Théorème (Shephard–Todd)

Les groupes de réflexions complexes irréductibles sont divisés en deux grandes familles :

- *une famille infinie* $\{G(r, p, n)\}$ *avec* $p \mid r$ *;*
- *34 exceptions.*

On retrouve nos groupes symétriques...

On a en fait
$$G(r,1,n) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n.$$

On peut voir $G(r,1,n)$ comme le groupe des matrices de permutations où les coefficients non nuls sont des racines complexes r-ièmes de l'unité.

Remarque

- On a $G(r,1,1) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.
- On a $G(1,1,n) \simeq \mathfrak{S}_n$ et $G(2,1,n) \simeq W_n$ (groupe symétrique signé).

On retrouve nos groupes symétriques. . .

On a en fait
$$G(r,1,n) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n.$$

On peut voir $G(r,1,n)$ comme le groupe des matrices de permutations où les coefficients non nuls sont des racines complexes r-ièmes de l'unité.

Remarque

- On a $G(r,1,1) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.
- On a $G(1,1,n) \simeq \mathfrak{S}_n$ et $G(2,1,n) \simeq W_n$ (groupe symétrique signé).

Les représentations complexes irréductibles seront cette fois des *r-partitions de n*, c'est-à-dire, des r-uplets $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ de partitions avec $|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n$.

Définition

L'algèbre de Hecke associée, déformation de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n]$, est appelée *algèbre d'Ariki–Koike*.

...ainsi que les groupes diédraux

Si p est un entier qui divise r, le groupe $G(r, p, n)$ est un sous-groupe d'indice p de $G(r, 1, n)$. Matriciellement, il est constitué des matrices de $G(r, 1, n)$ dont le produit des coefficient non nuls est une racine $\frac{r}{p}$-ième de l'unité.

Exemple

Si $p = r$ et $n = 2$ alors $G(r, r, 2)$ est le groupe diédral D_r.

...ainsi que les groupes diédraux

Si p est un entier qui divise r, le groupe $G(r, p, n)$ est un sous-groupe d'indice p de $G(r, 1, n)$. Matriciellement, il est constitué des matrices de $G(r, 1, n)$ dont le produit des coefficient non nuls est une racine $\frac{r}{p}$-ième de l'unité.

Exemple

Si $p = r$ et $n = 2$ alors $G(r, r, 2)$ est le groupe diédral D_r.

Remarque (Retour au théorème)

Le théorème des résidus bégayants se généralise au cadre des r-partitions. Étant donnée une représentation ρ de $G(r, 1, n)$, le théorème permet de donner des renseignements sur la restriction de ρ au sous-groupe $G(r, p, n)$.

Fin

Merci de votre attention !