Résidus bégayants, abaques et optimisation

Salim Rostam

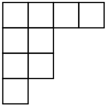
Mardi 15 mai 2018

Journée du LMV

Bipartitions

Définition

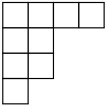
Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*. La partition $(4, 2, 2, 1)$ est ainsi représentée par  .

Bipartitions

Définition

Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*. La partition $(4, 2, 2, 1)$ est ainsi représentée par  .

Définition

Une *bipartition* est un couple de partitions.

Exemple

Le couple $\big((5,1),(2)\big)$ est une bipartition, formée des partitions $(5,1)$ et (2).

Multiensemble des résidus

Soit η un entier naturel non nul et soit $e := 2\eta$.

Définition

Le *multiensemble des résidus* de la bipartition (λ, μ) est la partie de :

$$\begin{array}{|c|c|c|c}\hline 0 & 1 & 2 & \dots \\ \hline -1 & 0 & 1 & \dots \\ \hline -2 & -1 & 0 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c}\hline \eta & \eta+1 & \eta+2 & \dots \\ \hline \eta-1 & \eta & \eta+1 & \dots \\ \hline \eta-2 & \eta-1 & \eta & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \pmod{e},$$

correspondant au diagramme de Young de (λ, μ).

Multiensemble des résidus

Soit η un entier naturel non nul et soit $e := 2\eta$.

Définition

Le *multiensemble des résidus* de la bipartition (λ, μ) est la partie de :

$$\begin{array}{|c|c|c|c}\hline 0 & 1 & 2 & \dots \\ \hline -1 & 0 & 1 & \dots \\ \hline -2 & -1 & 0 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c}\hline \eta & \eta+1 & \eta+2 & \dots \\ \hline \eta-1 & \eta & \eta+1 & \dots \\ \hline \eta-2 & \eta-1 & \eta & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \pmod{e},$$

correspondant au diagramme de Young de (λ, μ).

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((5,1),(2)\big)$ est donné pour $e = 4$ par $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$.

Multiplicités des résidus et décalage

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$. Si (λ, μ) est une bipartition, on note $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ le e-uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((4,2),(1)\big)$ pour $e = 6$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2}\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}$, donc $\alpha\Big((4,2),(1)\Big) = (2,1,1,2,0,1)$.

Multiplicités des résidus et décalage

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$. Si (λ, μ) est une bipartition, on note $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ le e-uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((4,2),(1)\big)$ pour $e = 6$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} \end{array}\ \ \boxed{3}$, donc $\alpha\big((4,2),(1)\big) = (2,1,1,2,0,1)$.

Définition (Décalage)

Pour $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^e$, on définit $\sigma \cdot \alpha \in \mathbb{N}^e$ par $(\sigma \cdot \alpha)_i \coloneqq \alpha_{\eta+i}$.

On a $\sigma \cdot \alpha = (\alpha_\eta, \alpha_{\eta+1}, \dots, \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\eta-1})$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu,\lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda,\mu)$. *En particulier, si* $\alpha \coloneqq \alpha(\lambda,\lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$. *En particulier, si* $\alpha := \alpha(\lambda, \lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$.

Théorème (R.)

Soit (λ, μ) *une bipartition et soit* $\alpha := \alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^{\mathsf{e}}$. *Si* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ *alors il existe une partition* ν *telle que* $\alpha = \alpha(\nu, \nu)$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu,\lambda) = \sigma\cdot\alpha(\lambda,\mu)$. *En particulier, si* $\alpha := \alpha(\lambda,\lambda)$ *alors* $\sigma\cdot\alpha = \alpha$.

Théorème (R.)

Soit (λ,μ) *une bipartition et soit* $\alpha := \alpha(\lambda,\mu) \in \mathbb{N}^e$. *Si* $\sigma\cdot\alpha = \alpha$ *alors il existe une partition* ν *telle que* $\alpha = \alpha(\nu,\nu)$.

Exemple

On prend $e = 6$. Les multiensembles :

$$\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 5\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&4&5\\\hline 2&3\\\cline{1-2} 1&2\\\cline{1-2} 0\\\cline{1-1}\end{array}\qquad \text{et}\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&4&5&0\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

coïncident (et $\alpha = (2,1,2,2,1,2)$).

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = (\textcolor{green}{3}, 2, 3, \textcolor{green}{3}, 2, 3)$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(green) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(green) 2 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = (\textcolor{green}{3}, 2, 3, \textcolor{green}{3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(green) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(green) 2 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, 2, \textcolor{green}{3}, 2, 2, \textcolor{green}{3})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ *(green) 4 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ *(green) 1 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, \textcolor{green}{2}, 2, 2, \textcolor{green}{2}, 2)$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \alpha = (2, 2, 3, 2, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \alpha = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \alpha = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & *(green) 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & *(green) 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & *(green) 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & *(green) 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(red) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(red) 2 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{red}2}, 2, 2, {\color{red}2})$$

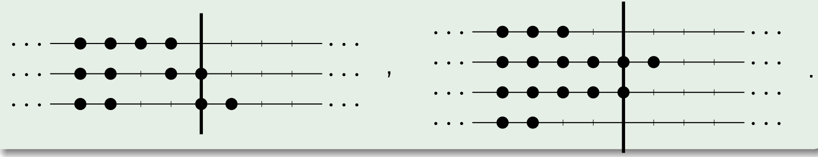
Abaques et cœurs

À chaque partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$, on associe un abaque à e fils de sorte que pour chaque $a \in \mathbb{N}^*$,

il y a exactement λ_a vides en haut et à gauche de la bille a.

Exemple

Les 3 et 4-abaques associés à la partition $(6, 4, 4, 2, 2)$ sont



Définition

Si chaque fil du e-abaque d'une partition λ a toutes ses billes consécutives (pas de « trou »), on dit que λ est un *e-cœur*.

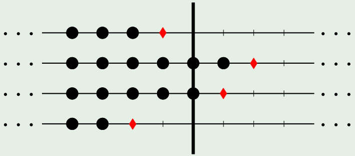
La partition de l'exemple précédent n'est pas 3-cœur mais est un 4-cœur.

Paramétrisation

Au e-abaque d'un e-cœur λ, on considère les abscisses $x(\lambda) \in \mathbb{Z}^e$ des premiers vides.

Exemple

On représente les premiers vides du 4-abaque associé au 4-cœur $(6, 4, 4, 2, 2)$ par des $\color{red}\blacklozenge$:



,

ainsi $x = (-1, 2, 1, -2)$.

Utilité de la paramétrisation

Proposition

Soit λ un e-cœur, soit $\alpha := \alpha(\lambda) \in \mathbb{N}^e$ le vecteur multiplicité du multiensemble des résidus et soit $x := x(\lambda) \in \mathbb{Z}^e$ le paramètre du e-abaque. On a :

$$x_0 + \cdots + x_{e-1} = 0,$$
$$\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0,$$
$$x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \ldots, e-1\}.$$

Utilité de la paramétrisation

Proposition

Soit λ *un e-cœur, soit* $\alpha := \alpha(\lambda) \in \mathbb{N}^e$ *le vecteur multiplicité du multiensemble des résidus et soit* $x := x(\lambda) \in \mathbb{Z}^e$ *le paramètre du e-abaque. On a :*

$$x_0 + \cdots + x_{e-1} = 0,$$
$$\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0,$$
$$x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \ldots, e-1\}.$$

Corollaire

Si $x = x(\lambda)$ *et* $y = x(\mu)$ *alors* $\alpha_0(\lambda, \mu) = q(x, y)$*, où*

$$q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^e \times \mathbb{Q}^e & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - y_0 - \cdots - y_{\eta-1} \end{array} \right. .$$

Lemme clé

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := x(\lambda)$ et $y := x(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme clé

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := x(\lambda)$ et $y := x(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme

Il suffit de trouver $z \in \mathbb{Z}^e$ tel que :

$$\begin{cases} q(z,z) \leq q(x,y), \\ z_0 + \cdots + z_{e-1} = 0, \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, & \textit{pour tout } i. \end{cases} \tag{E}$$

Lemme clé

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := x(\lambda)$ et $y := x(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

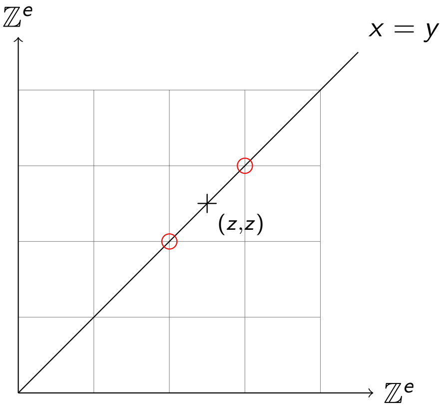
Lemme

Il suffit de trouver $z \in \mathbb{Z}^e$ tel que :

$$\begin{cases} q(z, z) \leq q(x, y), \\ z_0 + \cdots + z_{e-1} = 0, \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, \qquad \textit{pour tout } i. \end{cases} \tag{E}$$

Grâce à la convexité de q, l'élément $z := \frac{x+y}{2}$ vérifie (E).
Cependant, on peut avoir $z \notin \mathbb{Z}^e$: en général $z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^e$.

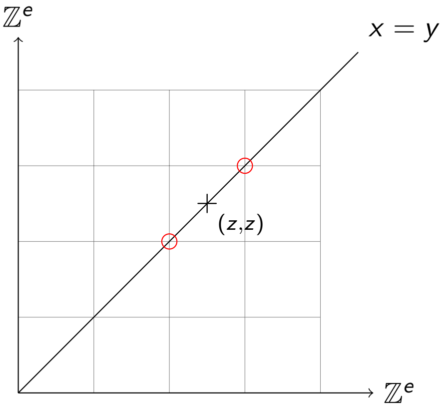
Première approche



En passant à un point rouge, on doit :

- s'assurer que les contraintes restent vérifiées
- évaluer l'erreur commise

Première approche



En passant à un point rouge, on doit :

- s'assurer que les contraintes restent vérifiées $\rightarrow$ matrices $\{0, 1\}$
- évaluer l'erreur commise $\rightarrow$ forte convexité

Fin

a	t	t	e	n	t	i	o	n
M	e	r	c	i				
v	o	t	r	e				
d	e							
!								