Résidus bégayants

Salim Rostam

Université Paris-Saclay

Vendredi 20 avril 2018

Séminaire Pampers

IRMAR, Rennes

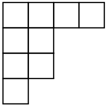
1 Un théorème de combinatoire

2 Outils pour la preuve

Bipartitions

Définition

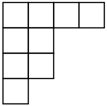
Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*, noté $\mathcal{Y}(\lambda)$. La partition $(4, 2, 2, 1)$ est alors représentée par  .

Bipartitions

Définition

Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*, noté $\mathcal{Y}(\lambda)$. La partition $(4, 2, 2, 1)$ est alors représentée par  .

Définition

Une *bipartition* est un couple de partitions.

Exemple

Le couple $\big((5, 1), (2)\big)$ est une bipartition, formée des partitions $(5, 1)$ et (2).

Multiensemble des résidus

Soit η un entier naturel non nul et soit $e := 2\eta$.

Définition

Le *multiensemble des résidus* de la bipartition (λ, μ) est la partie de :

$$\begin{array}{|c|c|c|l}
\hline
0 & 1 & 2 & \dots \\
\hline
-1 & 0 & 1 & \dots \\
\hline
-2 & -1 & 0 & \dots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|l}
\hline
\eta & \eta+1 & \eta+2 & \dots \\
\hline
\eta-1 & \eta & \eta+1 & \dots \\
\hline
\eta-2 & \eta-1 & \eta & \dots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
\qquad \pmod{e},$$

correspondant au diagramme de Young de (λ, μ).

Multiensemble des résidus

Soit η un entier naturel non nul et soit $e := 2\eta$.

Définition

Le *multiensemble des résidus* de la bipartition (λ, μ) est la partie de :

$$\begin{array}{|c|c|c|l} \hline 0 & 1 & 2 & \dots \\ \hline -1 & 0 & 1 & \dots \\ \hline -2 & -1 & 0 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|l} \hline \eta & \eta+1 & \eta+2 & \dots \\ \hline \eta-1 & \eta & \eta+1 & \dots \\ \hline \eta-2 & \eta-1 & \eta & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad \pmod e,$$

correspondant au diagramme de Young de (λ, μ).

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((5,1),(2)\big)$ est donné pour $e = 4$ par $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$.

Multiplicités des résidus et décalage

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$. Si (λ, μ) est une bipartition, on note $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ le e-uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((4,2),(1)\big)$ pour $e = 6$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} \end{array}\ \boxed{3}$, donc $\alpha((4,2),(1)) = (2,1,1,2,0,1)$.

Multiplicités des résidus et décalage

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$. Si (λ, μ) est une bipartition, on note $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ le e-uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((4,2),(1)\big)$ pour $e = 6$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2}\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}$, donc $\alpha((4,2),(1)) = (2,1,1,2,0,1)$.

Définition (Décalage)

Pour $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^e$, on définit $\sigma \cdot \alpha \in \mathbb{N}^e$ par $(\sigma \cdot \alpha)_i := \alpha_{\eta+i}$.

On a $\sigma \cdot \alpha = (\alpha_\eta, \alpha_{\eta+1}, \dots, \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\eta-1})$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$. *En particulier, si* $\alpha \coloneqq \alpha(\lambda, \lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$*. En particulier, si* $\alpha \coloneqq \alpha(\lambda, \lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$*.*

Théorème (R.)

Soit (λ, μ) *une bipartition et soit* $\alpha \coloneqq \alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^{\mathsf{e}}$*. Si* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ *alors il existe une partition* ν *telle que* $\alpha = \alpha(\nu, \nu)$*.*

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$*. En particulier, si* $\alpha := \alpha(\lambda, \lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$*.*

Théorème (R.)

Soit (λ, μ) *une bipartition et soit* $\alpha := \alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$*. Si* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ *alors il existe une partition* ν *telle que* $\alpha = \alpha(\nu, \nu)$*.*

Exemple

On prend $e = 6$. Les multiensembles :

$$\begin{ytableau} 0 \\ 5 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 \end{ytableau} \qquad \text{et} \qquad \begin{ytableau} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 \end{ytableau}$$

coïncident (et $\alpha = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$).

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} {\color{green}3} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} {\color{green}0} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad\qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & {\color{green}5} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & {\color{green}2} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad\qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(green) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(green) 2 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ *(green) 4 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ *(green) 1 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, {\color{green}2}, 2, 2, {\color{green}2}, 2)$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{array}{lll} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & \\ 4 & 5 & \\ 3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \\ 1 & 2 & \\ 0 & & \end{array} \qquad \alpha = (3,2,3,3,2,3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{lll} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & \\ 4 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \\ 1 & 2 & \end{array} \qquad \alpha = (2,2,3,2,2,3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{lll} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & \\ 4 & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \\ 1 & & \end{array} \qquad \alpha = (2,2,2,2,2,2)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{lll} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \end{array} \qquad \alpha = (2,1,2,2,1,2)$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = (3,2,3,3,2,3)$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} \color{green}3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} \color{green}0 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & \color{green}2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & \color{green}5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} \color{green}{3} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} \color{green}{0} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & \color{green}{2} \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & \color{green}{5} \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 5 & 0 \\ \hline 4 & \color{red}{5} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \color{red}{2} \\ \hline \end{array} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{red}2}, 2, 2, {\color{red}2})$$

1. Un théorème de combinatoire
2. Outils pour la preuve

Abaques

Définition

Le β-*nombre* associé à une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ est la suite $(\beta(\lambda)_i)_{i \geq 1}$ définie par $\beta(\lambda)_i := \lambda_i - i$. En disposant les éléments de ce β-nombre sur un abaque à e fils, on obtient le *e-abaque* de λ.

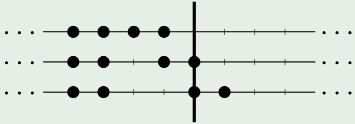
Abaques

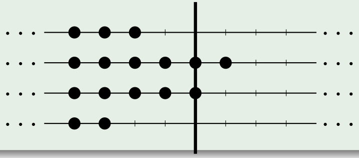
Définition

Le β-*nombre* associé à une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ est la suite $(\beta(\lambda)_i)_{i\geq 1}$ définie par $\beta(\lambda)_i := \lambda_i - i$. En disposant les éléments de ce β-nombre sur un abaque à e fils, on obtient le *e-abaque* de λ.

Exemple

Le β-nombre associé à la partition $(6,4,4,2,2)$ est $(5,2,1,-2,-3,-6,-7,\ldots)$. Des abaques sont :





Crochets, rubans

Définition

Un *crochet* pour une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme :

$$\{(i', j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \qquad (i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

Un *ruban* est la projection d'un e-crochet sur la frontière de $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Crochets, rubans

Définition

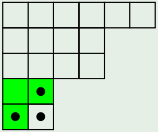
Un *crochet* pour une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme :

$$\{(i',j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \qquad (i,j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

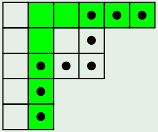
Un *ruban* est la projection d'un e-crochet sur la frontière de $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

Des e-crochets et leur e-rubans pour la partition $(6, 4^2, 2^2)$ sont



(pour $e = 3$) et



(pour $e = 9$).

Crochets, rubans

Définition

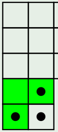
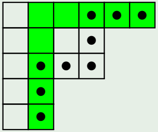
Un *crochet* pour une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme :

$$\{(i',j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \qquad (i,j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

Un *ruban* est la projection d'un e-crochet sur la frontière de $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

Des e-crochets et leur e-rubans pour la partition $(6,4^2,2^2)$ sont

 (pour $e = 3$) et  (pour $e = 9$).

Remarque

Si r est un ruban alors $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus r = \mathcal{Y}(\mu)$ où μ est une partition.

Cœurs

Définition

Soit $e \geq 2$. Une partition est un *e-cœur* si elle n'a pas de e-crochet (ou de façon équivalente, de e-ruban).

Cœurs

Définition

Soit $e \geq 2$. Une partition est un *e-cœur* si elle n'a pas de e-crochet (ou de façon équivalente, de e-ruban).

Théorème

Une partition est un e-cœur si et seulement si son e-abaque n'a pas de trou.

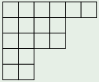
Définition

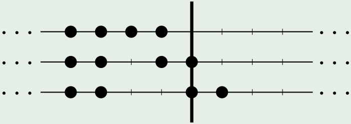
Soit $e \geq 2$. Une partition est un *e-cœur* si elle n'a pas de e-crochet (ou de façon équivalente, de e-ruban).

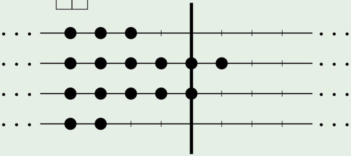
Théorème

Une partition est un e-cœur si et seulement si son e-abaque n'a pas de trou.

Exemple

Des abaques associés à la partition $\lambda :=$  sont :





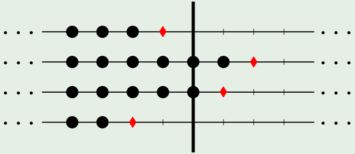
Ainsi λ est un 4-cœur (mais n'est pas un 3-cœur).

Paramétrisation

Au e-abaque d'un e-cœur λ, on considère les abscisses $\phi(\lambda) \coloneqq x = (x_0, \ldots, x_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ des premiers trous.

Exemple

On représente les premiers trous du 4-abaque associé au 4-cœur $(6, 4^2, 2^2)$ par des $\textcolor{red}{\blacklozenge}$:



,

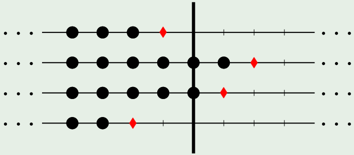
ainsi $x = (-1, 2, 1, -2)$.

Paramétrisation

Au e-abaque d'un e-cœur λ, on considère les abscisses $\phi(\lambda) \coloneqq x = (x_0, \ldots, x_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ des premiers trous.

Exemple

On représente les premiers trous du 4-abaque associé au 4-cœur $(6, 4^2, 2^2)$ par des $\color{red}\blacklozenge$:


,

ainsi $x = (-1, 2, 1, -2)$.

Proposition

On a $x_0 + \cdots + x_{e-1} = 0$. Réciproquement, tout e-uplet d'entiers de somme nulle correspond à un e-cœur.

Utilité de la paramétrisation

Proposition

On a $\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0$ *et* $x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ *pour tout* $i \in \{0, \ldots, e-1\}$.

Exemple

Avec $\lambda = (6, 4^2, 2^2)$, on a $x = (-1, 2, 1, -2)$ et $\alpha = (5, 6, 4, 3)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\hline
3 & 0 & 1 & 2 \\
\cline{1-4}
2 & 3 & 0 & 1 \\
\cline{1-4}
1 & 2 \\
\cline{1-2}
0 & 1 \\
\cline{1-2}
\end{array} \qquad (e = 4).$$

Utilité de la paramétrisation

Proposition

On a $\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0$ *et* $x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ *pour tout* $i \in \{0, \dots, e-1\}$.

Exemple

Avec $\lambda = (6, 4^2, 2^2)$, on a $x = (-1, 2, 1, -2)$ et $\alpha = (5, 6, 4, 3)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ \cline{1-4} 2 & 3 & 0 & 1 \\ \cline{1-4} 1 & 2 \\ \cline{1-2} 0 & 1 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad (e = 4).$$

Corollaire

Si $x = \phi(\lambda)$ *et* $y = \phi(\mu)$ *alors* $\alpha_0(\lambda, \mu) = q(x, y)$, *où :*

$$q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_0^e \times \mathbb{Q}_0^e & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - y_0 - \cdots - y_{\eta-1} \end{array} \right. .$$

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un *e*-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme

Il suffit de trouver un e-cœur ν tel que :

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu, \nu) \leq \alpha_0, \\ \alpha_i(\nu, \nu) - \alpha_{i+1}(\nu, \nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, & \textit{pour tout } i. \end{cases}$$

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme

Il suffit de trouver un e-cœur ν tel que :

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu, \nu) \leq \alpha_0, \\ \alpha_i(\nu, \nu) - \alpha_{i+1}(\nu, \nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, & \textit{pour tout } i. \end{cases}$$

Autrement dit, il suffit de trouver $z \in \mathbb{Z}_0^e$ tel que :

$$\begin{cases} q(z, z) \leq q(x, y), \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, & \textit{pour tout } i. \end{cases} \tag{E}$$

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme

Il suffit de trouver un e-cœur ν tel que :

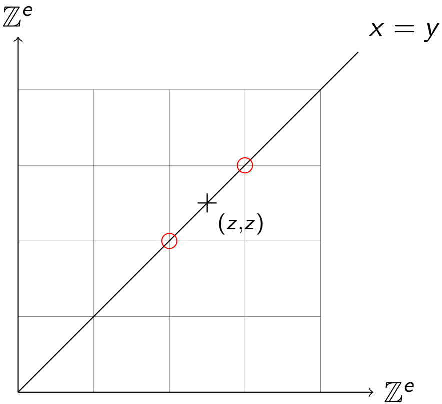
$$\begin{cases} \alpha_0(\nu,\nu) \leq \alpha_0, & \\ \alpha_i(\nu,\nu) - \alpha_{i+1}(\nu,\nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, & \textit{pour tout } i. \end{cases}$$

Autrement dit, il suffit de trouver $z \in \mathbb{Z}_0^e$ tel que :

$$\begin{cases} q(z,z) \leq q(x,y), & \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, & \textit{pour tout } i. \end{cases} \tag{E}$$

Par convexité et symétrie de q, l'élément $z := \frac{x+y}{2}$ vérifie (E) mais on peut avoir $z \notin \mathbb{Z}_0^e$ (en général $z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_0^e$).

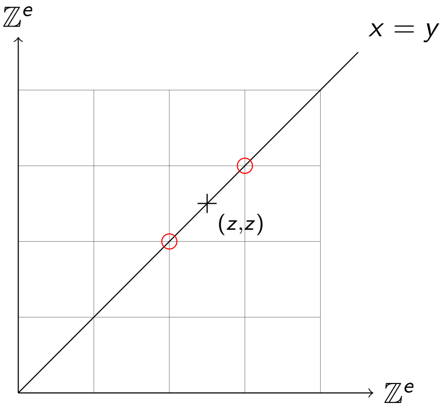
Première approche



En passant à un point rouge, on doit :

- s'assurer que les contraintes restent vérifiées
- évaluer l'erreur commise

Première approche



En passant à un point rouge, on doit :

- s'assurer que les contraintes restent vérifiées $\rightarrow$ matrices $\{0, 1\}$
- évaluer l'erreur commise $\rightarrow$ forte convexité

Les contraintes restent vérifiées : matrices $\{0, 1\}$

On range les parties fractionnaires des coordonnées de z dans une matrice, que l'on écrit comme moyenne de deux matrices M et M' à coefficients dans $\{0, 1\}$ telles que :

- les sommes sur les lignes ;
- les sommes sur certains blocs ;

sont deux à deux identiques. Ce résultat est connu si on n'impose pas la condition sur la somme sur les blocs.

Les contraintes restent vérifiées : matrices $\{0,1\}$

On range les parties fractionnaires des coordonnées de z dans une matrice, que l'on écrit comme moyenne de deux matrices M et M' à coefficients dans $\{0,1\}$ telles que :

- les sommes sur les lignes ;
- les sommes sur certains blocs ;

sont deux à deux identiques. Ce résultat est connu si on n'impose pas la condition sur la somme sur les blocs.

Théorème (R.)

On arrive à imposer la condition de somme sur les blocs en réalisant des interversions : on change des sous-matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ *dans* M *en* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et inversement dans* M'*, au même endroit.*

Évaluer l'erreur commise : forte convexité

La fonction q est convexe mais c'est aussi le cas de $q - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$.
Ainsi :

$$q(z,z) \leq q(x,y) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Évaluer l'erreur commise : forte convexité

La fonction q est convexe mais c'est aussi le cas de $q - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$. Ainsi :

$$q(z,z) \leq q(x,y) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

En utilisant notre théorème précédent sur les matrices $\{0,1\}$, on montre que l'une d'entre elle corrige z pour donner un $\tilde{z} \in \mathbb{Z}^e$ vérifiant (les contraintes et)

$$q(\tilde{z},\tilde{z}) \leq q(z,z) + \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Évaluer l'erreur commise : forte convexité

La fonction q est convexe mais c'est aussi le cas de $q - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$.
Ainsi :

$$q(z, z) \leq q(x, y) - \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$

En utilisant notre théorème précédent sur les matrices $\{0, 1\}$, on montre que l'une d'entre elle corrige z pour donner un $\tilde{z} \in \mathbb{Z}^e$ vérifiant (les contraintes et)

$$q(\tilde{z}, \tilde{z}) \leq q(z, z) + \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$

Le théorème inital sur les résidus bégayants est alors démontré !

Fin

a	t	t	e	n	t	i	o	n	!
M	e	r	c	i					
v	o	t	r	e					
d	e								