Graduation sur l'algèbre de Hecke de type D

Salim Rostam

Laboratoire de mathématiques de Versailles (LMV)
Université de Versailles Saint-Quentin (UVSQ)

Séminaire Pampers - IRMAR, Université Rennes 1
11 mai 2017

Plan

Groupes de Coxeter

Définition

Un *groupe de Coxeter* est un groupe possédant la présentation suivante :

générateurs $s_1, \dots, s_n$

relations $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$

où $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} = m_{ji} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ si $i \neq j$.

Groupes de Coxeter

Définition

Un *groupe de Coxeter* est un groupe possédant la présentation suivante :

générateurs $s_1, \ldots, s_n$

relations $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$

où $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} = m_{ji} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ si $i \neq j$.

Remarque

On a alors $\underbrace{s_i s_j s_i s_j \ldots}_{m_{ij} \text{ termes}} = \underbrace{s_j s_i s_j s_i \ldots}_{m_{ij} \text{ termes}}$: on parle de relation de *tresse*.

Groupes de Coxeter

Définition

Un *groupe de Coxeter* est un groupe possédant la présentation suivante :

générateurs $s_1, \dots, s_n$

relations $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$

où $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} = m_{ji} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ si $i \neq j$.

Remarque

On a alors $\underbrace{s_i s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij} \text{ termes}} = \underbrace{s_j s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij} \text{ termes}}$: on parle de relation de *tresse*.

Exemple

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$, avec $s_i = (i, i+1)$ et (m_{ij}) donnée par

$$m_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{si } i = j \pm 1, \\ 2 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Algèbre de Hecke

Soit F un corps et $\boldsymbol{q}$ une famille d'éléments de F.

Définition

Soit W un groupe de Coxeter, défini à partir des $(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
L'*algèbre de Hecke* $\mathrm{H}_W(\boldsymbol{q})$ de W est la F-algèbre unitère donnée par la présentation suivante :

générateurs $T_1, \ldots, T_n$

relations $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, (T_i + 1)(T_i - q_i) = 0$

$$\forall i \neq j, \underbrace{T_i T_j T_i T_j \ldots}_{m_{ij} \text{ termes}} = \underbrace{T_j T_i T_j T_i \ldots}_{m_{ij} \text{ termes}}.$$

Algèbre de Hecke

Soit F un corps et $\boldsymbol{q}$ une famille d'éléments de F.

Définition

Soit W un groupe de Coxeter, défini à partir des $(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. L'*algèbre de Hecke* $\mathrm{H}_W(\boldsymbol{q})$ de W est la F-algèbre unitère donnée par la présentation suivante :

générateurs $T_1, \ldots, T_n$

relations $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, (T_i + 1)(T_i - q_i) = 0$

$$\forall i \neq j, \underbrace{T_i T_j T_i T_j \ldots}_{m_{ij} \text{ termes}} = \underbrace{T_j T_i T_j T_i \ldots}_{m_{ij} \text{ termes}}.$$

Remarques

- On a $\mathrm{H}_W(\mathbf{1}) \simeq F[W]$, où $F[W]$ est l'algèbre du groupe W.

Algèbre de Hecke

Soit F un corps et $\boldsymbol{q}$ une famille d'éléments de F.

Définition

Soit W un groupe de Coxeter, défini à partir des $(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. L'*algèbre de Hecke* $\mathrm{H}_W(\boldsymbol{q})$ de W est la F-algèbre unitère donnée par la présentation suivante :

générateurs $T_1, \dots, T_n$

relations $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (T_i + 1)(T_i - q_i) = 0$

$$\forall i \neq j, \underbrace{T_i T_j T_i T_j \dots}_{m_{ij} \text{ termes}} = \underbrace{T_j T_i T_j T_i \dots}_{m_{ij} \text{ termes}}.$$

Remarques

- On a $\mathrm{H}_W(\mathbf{1}) \simeq F[W]$, où $F[W]$ est l'algèbre du groupe W.
- On doit supposer que $q_i = q_j$ si s_i et s_j sont conjugués dans W.

Groupes de réflexions réelles

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définitions

- Une *réflexion* de V est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre 2 possédant un hyperplan de points fixes.
- Un *groupe de réflexions réelles* est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

Groupes de réflexions réelles

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définitions

- Une *réflexion* de V est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre 2 possédant un hyperplan de points fixes.
- Un *groupe de réflexions réelles* est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

Exemple

Le groupe diédral $I_2(n) = \langle r, s \rangle$ (car r est un produit de réflexions).

Groupes de réflexions réelles

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définitions

- Une *réflexion* de V est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre 2 possédant un hyperplan de points fixes.
- Un *groupe de réflexions réelles* est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

Exemple

Le groupe diédral $I_2(n) = \langle r, s \rangle$ (car r est un produit de réflexions).

Théorème

Les groupes de réflexions réelles sont des groupes de Coxeter finis et réciproquement.

En posant $s_1 := s$ et $s_2 = rs$ dans l'exemple précédent, le groupe diédral $I_2(n)$ est un groupe de Coxeter avec $m_{12} = n$.

Classification des groupes de Coxeter

Théorème

Les groupes de Coxeter finis (autrement dit, les groupes de réflexions réelles) irréductibles se répartissent en quatre grandes familles :

- *les groupes de type A (avec A_{n-1} correspondant au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$) ;*
- *les groupes de type B et D ;*
- *les groupes de type I_2 (les $I_2(n)$ correspondant aux groupes diédraux) ;*

Classification des groupes de Coxeter

Théorème

Les groupes de Coxeter finis (autrement dit, les groupes de réflexions réelles) irréductibles se répartissent en quatre grandes familles :

- *les groupes de type A (avec A_{n-1} correspondant au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$) ;*
- *les groupes de type B et D ;*
- *les groupes de type I_2 (les $I_2(n)$ correspondant aux groupes diédraux) ;*

ainsi que six exceptions (les groupes F_4, H_3, H_4, E_6, E_7 et E_8).

Classification des groupes de Coxeter

Théorème

Les groupes de Coxeter finis (autrement dit, les groupes de réflexions réelles) irréductibles se répartissent en quatre grandes familles :

- *les groupes de type A (avec A_{n-1} correspondant au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$) ;*
- *les groupes de type B et D ;*
- *les groupes de type I_2 (les $I_2(n)$ correspondant aux groupes diédraux) ;*

ainsi que six exceptions (les groupes F_4, H_3, H_4, E_6, E_7 et E_8).

Remarque

On peut aussi classifier les groupes de réflexions *complexes* irréductibles. Il y a alors une série infinie $\{G(r,p,n)\}$ de groupes avec $p|r$, ainsi que 34 exceptions.

Classification des groupes de Coxeter

Théorème

Les groupes de Coxeter finis (autrement dit, les groupes de réflexions réelles) irréductibles se répartissent en quatre grandes familles :

- *les groupes de type A (avec A_{n-1} correspondant au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$) ;*
- *les groupes de type B et D ;*
- *les groupes de type I_2 (les $I_2(n)$ correspondant aux groupes diédraux) ;*

ainsi que six exceptions (les groupes F_4, H_3, H_4, E_6, E_7 et E_8).

Remarque

On peut aussi classifier les groupes de réflexions *complexes* irréductibles. Il y a alors une série infinie $\{G(r,p,n)\}$ de groupes avec $p|r$, ainsi que 34 exceptions. On retrouve dans la série infinie les type A, B, D, I_2 précédents, en particulier le type D_n correspond à $G(2,2,n)$.

Groupes de Coxeter de type B

Le groupe de Coxeter de type B_n est donné par les générateurs $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$, où $s_1, \ldots, s_{n-1}$ vérifient les relations du type A_{n-1} (*i.e.* de $\mathfrak{S}_n$) :

$$\forall i \geq 1, s_i^2 = 1 \text{ et } s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},$$
$$\forall i, j \geq 1, s_i s_j = s_j s_i \text{ si } |i - j| > 1,$$

Groupes de Coxeter de type B

Le groupe de Coxeter de type B_n est donné par les générateurs $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$, où $s_1, \dots, s_{n-1}$ vérifient les relations du type A_{n-1} (*i.e.* de $\mathfrak{S}_n$) :

$$\forall i \geq 1, s_i^2 = 1 \text{ et } s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},$$
$$\forall i, j \geq 1, s_i s_j = s_j s_i \text{ si } |i - j| > 1,$$

et avec les relations suivantes pour s_0 :

$$s_0^2 = 1 \text{ et } s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0,$$
$$\forall i \geq 2, s_0 s_i = s_i s_0.$$

Algèbres de Hecke de type B et D

Soit F un corps et $q \in F^\times$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la spécialisation $\mathrm{H}_n(q)$ l'algèbre de Hecke du groupe de Coxeter de type B_n, donnée par les générateurs $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$ et les relations suivantes :

$$\forall i \geq 1, (T_i + 1)(T_i - q) = 0 \text{ et } T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1},$$
$$\forall i, j \geq 1, T_i T_j = T_j T_i \text{ si } |i - j| > 1,$$

ainsi que :

$$(T_0 + 1)(T_0 - 1) = 0 \text{ et } T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0,$$
$$\forall i \geq 2, T_0 T_i = T_i T_0.$$

Algèbres de Hecke de type B et D

Soit F un corps et $q \in F^\times$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la spécialisation $\mathrm{H}_n(q)$ l'algèbre de Hecke du groupe de Coxeter de type B_n, donnée par les générateurs $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$ et les relations suivantes :

$$\forall i \geq 1, (T_i + 1)(T_i - q) = 0 \text{ et } T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1},$$
$$\forall i, j \geq 1, T_i T_j = T_j T_i \text{ si } |i - j| > 1,$$

ainsi que :

$$(T_0 + 1)(T_0 - 1) = 0 \text{ et } T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0,$$
$$\forall i \geq 2, T_0 T_i = T_i T_0.$$

L'algèbre de Hecke $\mathrm{H}_n^D(q)$ du groupe de Coxeter de type D_n s'obtient alors comme étant la sous-algèbre $\mathrm{H}_n(q)^\sigma \subseteq \mathrm{H}_n(q)$ fixée par l'automorphisme σ donné par :

$$\sigma(T_0) := -T_0,$$
$$\forall i \geq 1, \sigma(T_i) := T_i.$$

Plan

Algèbre de Hecke carquois cyclotomique

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$ et soit Γ_e le carquois cyclique à e sommets. On définit l'*algèbre de Hecke carquois cyclotomique* $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ comme étant la F-algèbre unitaire de générateurs $e(\boldsymbol{i})$ pour $\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$, $y_1, \dots, y_n$ et $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, avec les relations suivantes :

Algèbre de Hecke carquois cyclotomique

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$ et soit Γ_e le carquois cyclique à e sommets. On définit l'*algèbre de Hecke carquois cyclotomique* $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ comme étant la F-algèbre unitaire de générateurs $e(\boldsymbol{i})$ pour $\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$, $y_1, \dots, y_n$ et $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, avec les relations suivantes :

$$\sum_{\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n} e(\boldsymbol{i}) = 1, \quad e(\boldsymbol{i})e(\boldsymbol{i}') = \delta_{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}'} e(\boldsymbol{i}),$$

$$y_a e(\boldsymbol{i}) = e(\boldsymbol{i}) y_a, \quad \psi_a e(\boldsymbol{i}) = e(s_a \cdot \boldsymbol{i}) \psi_a,$$

$$y_a y_b = y_b y_a,$$

$$\psi_a y_b = y_b \psi_a \text{ si } b \neq a, a+1,$$

$$\psi_a \psi_b = \psi_b \psi_a \text{ si } |a - b| \geq 2,$$

$$\psi_a y_{a+1} e(\boldsymbol{i}) = (y_a \psi_a + \delta_{i_a i_{a+1}}) e(\boldsymbol{i}),$$

$$y_{a+1} \psi_a e(\boldsymbol{i}) = (\psi_a y_a + \delta_{i_a i_{a+1}}) e(\boldsymbol{i}),$$

$$y_1^{\delta_{i_1,0} + \delta_{i_1,\eta}} e(\boldsymbol{i}) = 0,$$

Algèbre de Hecke carquois cyclotomique

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$ et soit Γ_e le carquois cyclique à e sommets. On définit l'*algèbre de Hecke carquois cyclotomique* $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ comme étant la F-algèbre unitaire de générateurs $e(\boldsymbol{i})$ pour $\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$, $y_1, \dots, y_n$ et $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, avec les relations suivantes : (suite)

$$\psi_a^2 e(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_a = i_{a+1}, \\ e(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_a \not\to i_{a+1}, \\ \pm(y_{a+1} - y_a)e(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_a \to i_{a+1} \text{ ou } i_a \leftarrow i_{a+1}, \\ -(y_{a+1} - y_a)^2 e(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_a \leftrightarrows i_{a+1}, \end{cases}$$

$$(\psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1} - \psi_a\psi_{a+1}\psi_a)e(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} e(\boldsymbol{i}) & i_{a+2} = i_a \to i_{a+1}, \\ -e(\boldsymbol{i}) & i_{a+2} = i_a \leftarrow i_{a+1} \\ (2y_{a+1} - y_a - y_{a+1})e(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_{a+2} = i_a \leftrightarrows i_{a+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème d'isomorphisme gradué

L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ est $\mathbb{Z}$-graduée via $\deg e(\boldsymbol{i}) := 0$, $\deg y_a := 2$ et :

$$\deg \psi_a e(\boldsymbol{i}) := \begin{cases} -2 & \text{si } i_a = i_{a+1}, \\ 0 & \text{si } i_a \not- i_{a+1}, \\ 1 & \text{si } i_a \to i_{a+1} \text{ ou } i_a \leftarrow i_{a+1}, \\ 2 & \text{si } i_a \leftrightarrows i_{a+1}. \end{cases}$$

Théorème d'isomorphisme gradué

L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ est $\mathbb{Z}$-graduée via $\deg e(\boldsymbol{i}) := 0$, $\deg y_a := 2$ et :

$$\deg \psi_a e(\boldsymbol{i}) := \begin{cases} -2 & \text{si } i_a = i_{a+1}, \\ 0 & \text{si } i_a \not- i_{a+1}, \\ 1 & \text{si } i_a \to i_{a+1} \text{ ou } i_a \leftarrow i_{a+1}, \\ 2 & \text{si } i_a \leftrightarrows i_{a+1}. \end{cases}$$

Théorème (Rouquier 08, Brundan–Kleshchev 09)

Soit $q \in F^\times$ d'ordre $e \in 2\mathbb{N}^*$. L'algèbre de Hecke $\mathrm{H}_n(q)$ est isomorphe sur F à l'algèbre de Hecke carquois cyclotomique $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$.

Théorème d'isomorphisme gradué

L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ est $\mathbb{Z}$-graduée via $\deg e(\boldsymbol{i}) := 0$, $\deg y_a := 2$ et :

$$\deg \psi_a e(\boldsymbol{i}) := \begin{cases} -2 & \text{si } i_a = i_{a+1}, \\ 0 & \text{si } i_a \not\!\!- i_{a+1}, \\ 1 & \text{si } i_a \to i_{a+1} \text{ ou } i_a \leftarrow i_{a+1}, \\ 2 & \text{si } i_a \leftrightarrows i_{a+1}. \end{cases}$$

Théorème (Rouquier 08, Brundan–Kleshchev 09)

Soit $q \in F^\times$ d'ordre $e \in 2\mathbb{N}^*$. L'algèbre de Hecke $\mathrm{H}_n(q)$ est isomorphe sur F à l'algèbre de Hecke carquois cyclotomique $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$.

Corollaire

L'algèbre $\mathrm{H}_n(q)$:

- *admet une graduation (non triviale) ;*
- *ne dépend de q que par son ordre.*

Compatibilité avec l'algèbre de Hecke de type D

Rappelons que $\mathrm{H}_n^D(q) = \mathrm{H}_n(q)^\sigma$ où σ est l'automorphisme de $\mathrm{H}_n(q)$ donné par $\sigma(T_0) = -T_0$ et $\sigma(T_i) = T_i$ pour $i \geq 1$.

Théorème (R. 16)

On peut choisir un isomorphisme $\mathrm{H}_n(q) \simeq \mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ de telle sorte que l'automorphisme σ soit donné sur $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ par :

- $\bar{\sigma}(y_a) = y_a$;
- $\bar{\sigma}(\psi_a) = \psi_a$;
- $\bar{\sigma}(e(\boldsymbol{i})) = e(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\eta})$ *où* $\boldsymbol{\eta} := (\eta, \ldots, \eta)$.

En particulier, $\mathrm{H}_n^D(q) = \mathrm{H}_n(q)^\sigma \simeq \mathrm{R}_n(\Gamma_e)^{\bar{\sigma}}$.

Compatibilité avec l'algèbre de Hecke de type D

Rappelons que $\mathrm{H}_n^D(q) = \mathrm{H}_n(q)^\sigma$ où σ est l'automorphisme de $\mathrm{H}_n(q)$ donné par $\sigma(T_0) = -T_0$ et $\sigma(T_i) = T_i$ pour $i \geq 1$.

Théorème (R. 16)

On peut choisir un isomorphisme $\mathrm{H}_n(q) \simeq \mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ de telle sorte que l'automorphisme σ soit donné sur $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ par :

- $\bar{\sigma}(y_a) = y_a$;
- $\bar{\sigma}(\psi_a) = \psi_a$;
- $\bar{\sigma}(e(\boldsymbol{i})) = e(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\eta})$ *où* $\boldsymbol{\eta} := (\eta, \ldots, \eta)$.

En particulier, $\mathrm{H}_n^D(q) = \mathrm{H}_n(q)^\sigma \simeq \mathrm{R}_n(\Gamma_e)^{\bar{\sigma}}$.

Théorème (R. 16)

On peut donner une présentation de $\mathrm{H}_n^D(q)$ en termes de générateurs $y_1, \ldots, y_n, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ et $e(\gamma)$ pour $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$. Les relations sont les mêmes que pour $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$.

Preuve de la présentation

Lemme

Soit $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$. *Les propositions du type* $\gamma_a \bowtie \gamma_b$ *pour* $\bowtie \in \{=, \neq, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrows\}$ *ont bien un sens pour* $a, b \in \{1, \ldots, n\}$.

Preuve de la présentation

Lemme

Soit $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$. *Les propositions du type* $\gamma_a \bowtie \gamma_b$ *pour* $\bowtie \in \{=, \neq, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrows\}$ *ont bien un sens pour* $a, b \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque

Pour $\gamma \neq \gamma' \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$, on ne peut définir aucun $\gamma_a \bowtie \gamma'_b$.

Preuve de la présentation

Lemme

Soit $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$. *Les propositions du type* $\gamma_a \bowtie \gamma_b$ *pour* $\bowtie \in \{=, \neq, \to, \leftarrow, \leftrightarrows\}$ *ont bien un sens pour* $a, b \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque

Pour $\gamma \neq \gamma' \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$, on ne peut définir aucun $\gamma_a \bowtie \gamma'_b$.

L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ est le quotient de $\widehat{\mathrm{R}}_n(\Gamma_e)$ par l'idéal I engendré par les relations $y_1^{\delta_{i_1,0}+\delta_{i_1,\eta}} e(\boldsymbol{i})$ pour $\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$.

Preuve de la présentation

Lemme

Soit $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$. Les propositions du type $\gamma_a \bowtie \gamma_b$ pour $\bowtie \in \{=, \neq, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrows\}$ ont bien un sens pour $a, b \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque

Pour $\gamma \neq \gamma' \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$, on ne peut définir aucun $\gamma_a \bowtie \gamma'_b$.

L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ est le quotient de $\widehat{\mathrm{R}}_n(\Gamma_e)$ par l'idéal I engendré par les relations $y_1^{\delta_{i_1,0}+\delta_{i_1,\eta}} e(\boldsymbol{i})$ pour $\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$. En notant $I^{\bar{\sigma}}$ l'idéal engendré par $y_1^{\delta_{\gamma_1,\{0,\eta\}}} e(\gamma)$ pour $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$, on montre que :

$$\left(\widehat{\mathrm{R}}_n(\Gamma_e)/I\right)^{\bar{\sigma}} \simeq \widehat{\mathrm{R}}_n(\Gamma_e)^{\bar{\sigma}}/I^{\bar{\sigma}}.$$

Preuve de la présentation

Lemme

Soit $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$. Les propositions du type $\gamma_a \bowtie \gamma_b$ pour $\bowtie \in \{=, \neq, \to, \leftarrow, \leftrightarrows\}$ ont bien un sens pour $a, b \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque

Pour $\gamma \neq \gamma' \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$, on ne peut définir aucun $\gamma_a \bowtie \gamma'_b$.

L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ est le quotient de $\widehat{\mathrm{R}}_n(\Gamma_e)$ par l'idéal I engendré par les relations $y_1^{\delta_{i_1,0}+\delta_{i_1,\eta}}e(\boldsymbol{i})$ pour $\boldsymbol{i} \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$. En notant $I^{\bar{\sigma}}$ l'idéal engendré par $y_1^{\delta_{\gamma_1,\{0,\eta\}}}e(\gamma)$ pour $\gamma \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n/\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$, on montre que :

$$\left(\widehat{\mathrm{R}}_n(\Gamma_e)/I\right)^{\bar{\sigma}} \simeq \widehat{\mathrm{R}}_n(\Gamma_e)^{\bar{\sigma}}/I^{\bar{\sigma}}.$$

La clé de la preuve est le fait que $\mu := \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \sigma)$ est une surjection de $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)$ sur $\mathrm{R}_n(\Gamma_e)^{\bar{\sigma}}$.

Fin

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

S'il reste du temps...

- Graphes pour les types A, B, D
- Forme matricielle des groupes de réflexions complexes.