Résidus bégayants

Salim Rostam

Université Paris-Saclay

Vendredi 6 octobre 2017

Séminaire doctorants

LAMFA, Amiens

Bipartitions

Définition

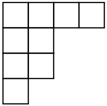
Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*, noté $\mathcal{Y}(\lambda)$. La partition $(4, 2, 2, 1)$ est alors représentée par $\ydiagram{4,2,2,1}$.

Bipartitions

Définition

Une *partition* est une suite décroissante d'entiers naturels non nuls.

On peut représenter une partition via son *diagramme de Young*, noté $\mathcal{Y}(\lambda)$. La partition $(4, 2, 2, 1)$ est alors représentée par  .

Définition

Une *bipartition* est un couple de partitions.

Exemple

Le couple $\big((5, 1), (2)\big)$ est une bipartition, formée des partitions $(5, 1)$ et (2).

Multiensemble des résidus

Soit η un entier naturel non nul et soit $e := 2\eta$.

Définition

Le *multiensemble des résidus* de la bipartition (λ, μ) est la partie de :

$$\begin{array}{|c|c|c|c}\hline 0 & 1 & 2 & \dots \\ \hline -1 & 0 & 1 & \dots \\ \hline -2 & -1 & 0 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c}\hline \eta & \eta+1 & \eta+2 & \dots \\ \hline \eta-1 & \eta & \eta+1 & \dots \\ \hline \eta-2 & \eta-1 & \eta & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \pmod{e},$$

correspondant au diagramme de Young de (λ, μ).

Multiensemble des résidus

Soit η un entier naturel non nul et soit $e := 2\eta$.

Définition

Le *multiensemble des résidus* de la bipartition (λ, μ) est la partie de :

$$\begin{array}{|c|c|c|c}\hline 0 & 1 & 2 & \dots \\ \hline -1 & 0 & 1 & \dots \\ \hline -2 & -1 & 0 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c}\hline \eta & \eta+1 & \eta+2 & \dots \\ \hline \eta-1 & \eta & \eta+1 & \dots \\ \hline \eta-2 & \eta-1 & \eta & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \pmod{e},$$

correspondant au diagramme de Young de (λ, μ).

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((5,1),(2)\big)$ est donné pour $e = 4$ par $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$.

Multiplicités des résidus et décalage

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$. Si (λ, μ) est une bipartition, on note $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ le e-uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((4,2),(1)\big)$ pour $e = 6$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2}\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}$, donc $\alpha\big((4,2),(1)\big) = (2,1,1,2,0,1)$.

Multiplicités des résidus et décalage

Soit $e = 2\eta \in 2\mathbb{N}^*$. Si (λ, μ) est une bipartition, on note $\alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$ le e-uplet des multiplicités du multiensemble des résidus.

Exemple

Le multiensemble des résidus de la bipartition $\big((4,2),(1)\big)$ pour $e = 6$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2}\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}$, donc $\alpha((4,2),(1)) = (2,1,1,2,0,1)$.

Définition (Décalage)

Pour $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^e$, on définit $\sigma \cdot \alpha \in \mathbb{N}^e$ par $(\sigma \cdot \alpha)_i := \alpha_{\eta+i}$.

On a $\sigma \cdot \alpha = (\alpha_\eta, \alpha_{\eta+1}, \dots, \alpha_{e-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\eta-1})$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$. *En particulier, si* $\alpha \coloneqq \alpha(\lambda, \lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$. *En particulier, si* $\alpha \coloneqq \alpha(\lambda, \lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$.

Théorème (R.)

Soit (λ, μ) *une bipartition et soit* $\alpha \coloneqq \alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^{\mathsf{e}}$. *Si* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ *alors il existe une partition* ν *telle que* $\alpha = \alpha(\nu, \nu)$.

Bégaiements

Proposition

On a $\alpha(\mu, \lambda) = \sigma \cdot \alpha(\lambda, \mu)$. *En particulier, si* $\alpha := \alpha(\lambda, \lambda)$ *alors* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$.

Théorème (R.)

Soit (λ, μ) *une bipartition et soit* $\alpha := \alpha(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^e$. *Si* $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ *alors il existe une partition* ν *telle que* $\alpha = \alpha(\nu, \nu)$.

Exemple

On prend $e = 6$. Les multiensembles :

$$\begin{ytableau} 0 \\ 5 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 \end{ytableau} \qquad \text{et} \qquad \begin{ytableau} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 \end{ytableau}$$

coïncident (et $\alpha = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$).

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(green) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(green) 2 \end{ytableau} \qquad \qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (\textcolor{green}{3}, 2, 3, \textcolor{green}{3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(green) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(green) 2 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (2, 2, \textcolor{green}{3}, 2, 2, \textcolor{green}{3})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ *(green) 4 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ *(green) 1 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (2, \textcolor{green}{2}, 2, 2, \textcolor{green}{2}, 2)$$

Démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (\textcolor{green}{3}, 2, 3, \textcolor{green}{3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(green) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(green) 2 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (2, 2, \textcolor{green}{3}, 2, 2, \textcolor{green}{3})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ *(green) 4 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ *(green) 1 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (2, \textcolor{green}{2}, 2, 2, \textcolor{green}{2}, 2)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{ytableau} \qquad\qquad \alpha = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$$

Échec de démonstration par l’exemple

On a $\alpha\left(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}\right) = (2,1,2,2,1,2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2} \ & \ \\ \cline{1-2} \ \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} \textcolor{green}{3} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} \textcolor{green}{0} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \alpha = (\textcolor{green}{3}, 2, 3, \textcolor{green}{3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & \textcolor{green}{2} \\ \hline 5 & 0 \\ \cline{1-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & \textcolor{green}{5} \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \alpha = (2, 2, \textcolor{green}{3}, 2, 2, \textcolor{green}{3})$$

Échec de démonstration par l'exemple

On a $\alpha(\ydiagram{1,1}, \ydiagram{3,2,2,1}) = (2, 1, 2, 2, 1, 2)$.

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \\ *(green) 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ *(green) 0 \end{ytableau} \qquad \alpha = ({\color{green}3}, 2, 3, {\color{green}3}, 2, 3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 & *(green) 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 & *(green) 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{green}3}, 2, 2, {\color{green}3})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{ytableau} 0 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & *(red) 5 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & *(red) 2 \end{ytableau} \qquad \alpha = (2, 2, {\color{red}2}, 2, 2, {\color{red}2})$$

Abaques

Définition

Le β-*nombre* associé à une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ est la suite $(\beta(\lambda)_i)_{i \geq 1}$ définie par $\beta(\lambda)_i := \lambda_i - i$. En disposant les éléments de ce β-nombre sur un abaque à e fils, on obtient le *e-abaque* de λ.

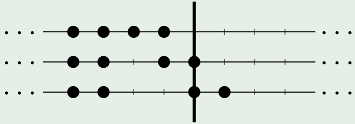
Abaques

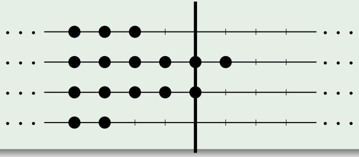
Définition

Le β-*nombre* associé à une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ est la suite $(\beta(\lambda)_i)_{i \geq 1}$ définie par $\beta(\lambda)_i := \lambda_i - i$. En disposant les éléments de ce β-nombre sur un abaque à e fils, on obtient le *e-abaque* de λ.

Exemple

Le β-nombre associé à la partition $(6, 4, 4, 2, 2)$ est $(5, 2, 1, -2, -3, -6, -7, \dots)$. Des abaques sont :





Crochets, rubans

Définition

Un *crochet* pour une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme :

$$\{(i',j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \qquad (i,j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

Un *ruban* est la projection d'un e-crochet sur la frontière de $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Crochets, rubans

Définition

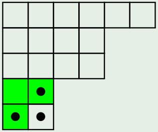
Un *crochet* pour une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme :

$$\{(i',j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \qquad (i,j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

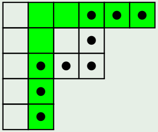
Un *ruban* est la projection d'un e-crochet sur la frontière de $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

Des e-crochets et leur e-rubans pour la partition $(6, 4^2, 2^2)$ sont



(pour $e = 3$) et



(pour $e = 9$).

Crochets, rubans

Définition

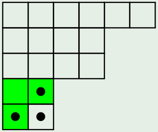
Un *crochet* pour une partition λ est une partie de $\mathcal{Y}(\lambda)$ de la forme :

$$\{(i',j') \in \mathcal{Y}(\lambda) : i' = i \text{ ou } j' = j\}, \qquad (i,j) \in \mathcal{Y}(\lambda).$$

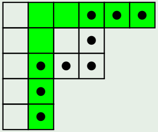
Un *ruban* est la projection d'un e-crochet sur la frontière de $\mathcal{Y}(\lambda)$.

Exemple

Des e-crochets et leur e-rubans pour la partition $(6, 4^2, 2^2)$ sont



(pour $e = 3$) et



(pour $e = 9$).

Remarque

Si r est un ruban alors $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus r = \mathcal{Y}(\mu)$ où μ est une partition.

Cœurs

Définition

Soit $e \geq 2$. Une partition est un *e-cœur* si elle n'a pas de e-crochet (ou de façon équivalente, de e-ruban).

Cœurs

Définition

Soit $e \geq 2$. Une partition est un *e-cœur* si elle n'a pas de e-crochet (ou de façon équivalente, de e-ruban).

Théorème

Une partition est un e-cœur si et seulement si son e-abaque n'a pas de trou.

Cœurs

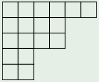
Définition

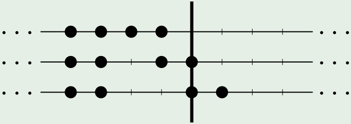
Soit $e \geq 2$. Une partition est un *e-cœur* si elle n'a pas de e-crochet (ou de façon équivalente, de e-ruban).

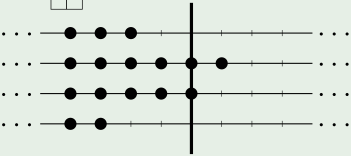
Théorème

Une partition est un e-cœur si et seulement si son e-abaque n'a pas de trou.

Exemple

Les abaques associés à la partition $\lambda :=$  sont :





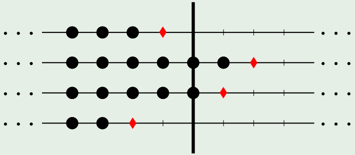
Ainsi λ est un 4-cœur (mais n'est pas un 3-cœur).

Paramétrisation

Au e-abaque d'un e-cœur λ, on considère les abscisses $\phi(\lambda) \coloneqq x = (x_0, \dots, x_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ des premiers trous.

Exemple

On représente les premiers trous du 4-abaque associé au 4-cœur $(6, 4^2, 2^2)$ par des $\color{red}\blacklozenge$:



,

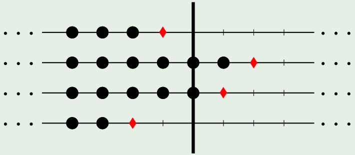
ainsi $x = (-1, 2, 1, -2)$.

Paramétrisation

Au e-abaque d'un e-cœur λ, on considère les abscisses $\phi(\lambda) \coloneqq x = (x_0, \ldots, x_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ des premiers trous.

Exemple

On représente les premiers trous du 4-abaque associé au 4-cœur $(6, 4^2, 2^2)$ par des $\color{red}\blacklozenge$:



,

ainsi $x = (-1, 2, 1, -2)$.

Proposition

On a $x_0 + \cdots + x_{e-1} = 0$. Réciproquement, tout e-uplet d'entiers de somme nulle correspond à un e-cœur.

Utilité de la paramétrisation

Proposition

On a $\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0$ *et* $x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ *pour tout* $i \in \{0, \ldots, e-1\}$.

Exemple

Avec $\lambda = (6, 4^2, 2^2)$, on a $x = (-1, 2, 1, -2)$ et $\alpha = (5, 6, 4, 3)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\hline
3 & 0 & 1 & 2 \\
\cline{1-4}
2 & 3 & 0 & 1 \\
\cline{1-4}
1 & 2 \\
\cline{1-2}
0 & 1 \\
\cline{1-2}
\end{array} \qquad (e = 4).$$

Utilité de la paramétrisation

Proposition

On a $\frac{1}{2}\|x\|^2 = \alpha_0$ *et* $x_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ *pour tout* $i \in \{0, \ldots, e-1\}$.

Exemple

Avec $\lambda = (6, 4^2, 2^2)$, on a $x = (-1, 2, 1, -2)$ et $\alpha = (5, 6, 4, 3)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\hline
3 & 0 & 1 & 2 \\
\cline{1-4}
2 & 3 & 0 & 1 \\
\cline{1-4}
1 & 2 \\
\cline{1-2}
0 & 1 \\
\cline{1-2}
\end{array} \qquad (e = 4).$$

Corollaire

Si $x = \phi(\lambda)$ *et* $y = \phi(\mu)$ *alors* $\alpha_0(\lambda, \mu) = q(x, y)$*, où :*

$$q : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_0^e \times \mathbb{Q}_0^e & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - y_0 - \cdots - y_{\eta-1} \end{array} \right. .$$

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un *e*-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme

Il suffit de trouver un e-cœur ν tel que :

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu, \nu) \leq \alpha_0, \\ \alpha_i(\nu, \nu) - \alpha_{i+1}(\nu, \nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, \qquad \textit{pour tout } i. \end{cases}$$

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme

Il suffit de trouver un e-cœur ν tel que :

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu,\nu) \leq \alpha_0, \\ \alpha_i(\nu,\nu) - \alpha_{i+1}(\nu,\nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, & \textit{pour tout } i. \end{cases}$$

Autrement dit, il suffit de trouver $z \in \mathbb{Z}_0^e$ tel que :

$$\begin{cases} q(z,z) \leq q(x,y), \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, & \textit{pour tout } i. \end{cases} \tag{E}$$

Utilisation de la convexité

Soit (λ, μ) un e-bicœur, posons $x := \phi(\lambda)$ et $y := \phi(\mu)$. On suppose que $\alpha := \alpha(\lambda, \mu)$ vérifie $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ et on veut montrer qu'il existe une partition ν telle que $\alpha(\nu, \nu) = \alpha$.

Lemme

Il suffit de trouver un e-cœur ν tel que :

$$\begin{cases} \alpha_0(\nu, \nu) \leq \alpha_0, & \\ \alpha_i(\nu, \nu) - \alpha_{i+1}(\nu, \nu) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, & \textit{pour tout } i. \end{cases}$$

Autrement dit, il suffit de trouver $z \in \mathbb{Z}_0^e$ tel que :

$$\begin{cases} q(z, z) \leq q(x, y), & \\ z_i + z_{i+\eta} = x_i + y_{i+\eta}, & \textit{pour tout } i. \end{cases} \tag{E}$$

Par convexité et symétrie de q, l'élément $z := \frac{x+y}{2}$ vérifie (E) mais on peut avoir $z \notin \mathbb{Z}_0^e$ (en général $z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_0^e$).

Forte convexité et approximation

La fonction q est convexe mais c'est aussi le cas de $q - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$. Ainsi :

$$q(z, z) \leq q(x, y) - \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$

Forte convexité et approximation

La fonction q est convexe mais c'est aussi le cas de $q - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$. Ainsi :

$$q(z,z) \leq q(x,y) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Théorème

On peut trouver un élément $\widetilde{z} \in \mathbb{Z}_0^e$ vérifiant :

$$q(\widetilde{z},\widetilde{z}) \leq q(z,z) + \frac{1}{4}\|x-y\|^2,$$

ainsi que pour tout i :

$$z_i + z_{i+\eta} = \widetilde{z}_i + \widetilde{z}_{i+\eta},$$
$$(|z_i - \widetilde{z}_i| < 1).$$

On conclut que $\widetilde{z}$ vérifie (E), en particulier $q(\widetilde{z},\widetilde{z}) \leq q(x,y)$.

Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation $\widetilde{z}$ repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} V^{[1]} & V^{[2]} \end{array}\right),$$

qui vérifie $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$ et $|V^{[i]}| \in \mathbb{N}$.

Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation $\widetilde{z}$ repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} V^{[1]} & V^{[2]} \end{array}\right),$$

qui vérifie $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$ et $|V^{[i]}| \in \mathbb{N}$. On veut écrire V sous la forme $V = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$, où les matrices $E_i = \begin{pmatrix} e_i^{(1)} \\ e_i^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_i^{[1]} & E_i^{[2]} \end{array}\right)$ vérifient $|v^{(i)}| = |e_1^{(i)}| = |e_2^{(i)}|$ et $|V^{[i]}| = |E_1^{[i]}| = |E_2^{[i]}|$.

Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation $\widetilde{z}$ repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} V^{[1]} & V^{[2]} \end{array}\right),$$

qui vérifie $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$ et $|V^{[i]}| \in \mathbb{N}$. On veut écrire V sous la forme $V = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$, où les matrices $E_i = \begin{pmatrix} e_i^{(1)} \\ e_i^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_i^{[1]} & E_i^{[2]} \end{array}\right)$ vérifient $|v^{(i)}| = |e_1^{(i)}| = |e_2^{(i)}|$ et $|V^{[i]}| = |E_1^{[i]}| = |E_2^{[i]}|$. On prend :

$$E_1 := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$E_2 := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Comment approximer

L'existence d'une bonne approximation $\widetilde{z}$ repose sur l'existence d'une certaine matrice binaire. Prenons l'exemple de la matrice suivante :

$$V := \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} V^{[1]} & V^{[2]} \end{array}\right),$$

qui vérifie $|v^{(i)}| \in \mathbb{N}$ et $|V^{[i]}| \in \mathbb{N}$. On veut écrire V sous la forme $V = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$, où les matrices $E_i = \begin{pmatrix} e_i^{(1)} \\ e_i^{(2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E_i^{[1]} & E_i^{[2]} \end{array}\right)$ vérifient $|v^{(i)}| = |e_1^{(i)}| = |e_2^{(i)}|$ et $|V^{[i]}| = |E_1^{[i]}| = |E_2^{[i]}|$. On prend :

$$E_1 := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$E_2 := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Fin

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !

Merci de votre attention !