Algèbre de Hecke carquois et algèbre de Hecke de $G(r,p,n)$

Salim Rostam

25 octobre 2018

Séminaire de géométrie arithmétique de l'IRMAR

1 Algèbres de Hecke des groupes de réflexions – Algèbres de Hecke carquois

Isomorphisme entre algèbres Ariki–Koike et algèbres de Hecke carquois cyclotomiques de type A (Brundan–Kleshchev et Rouquier).

1.1 Groupes de réflexions complexes

Définition. *Réflexion complexe* : endomorphisme (différent de l'identité) de $\mathbb{C}^n$ fixant un hyperplan et d'ordre fini. Aussi pseudo-réflexion. *Groupe de réflexions complexes* : groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Classification : Shephard–Todd, 1954. Famille infinie $\{G(r,p,n)\}$ avec $p \mid r$ et 34 exceptions.

— type A_{n-1} est $G(1,1,n)$;
— type B_n est $G(2,1,n)$;
— type D_n est $G(2,2,n)$;
— type diédral $I_2(n)$ est $G(n,n,2)$.

Comme pour groupes de réflexions réelles, présentations « à la Coxeter »

$$G(r,1,n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n \simeq \left\langle s, t_1, \dots, t_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_i^2 = 1, (t_i t_j)^2 = 1 \text{ si } |i-j| > 1 \text{ et } (t_i t_{i+1} t_i)^2 = 1, \\ s^r = 1, (st_1)^2 = (t_1 s)^2 \text{ et } st_i = t_i s \text{ si } i \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

(tracer le diagramme). Parler de matrices monomiales, pour $G(r,p,n)$ également.

Généralisant la définition pour groupes de Coxeter, algèbre de Hecke $\mathrm{H}_{\boldsymbol{u}}(W)$ pour W groupe de réflexions complexes irréductible (BMR, 1998). Mois immédiat que cas réel.

1.2 Algèbres de Hecke

Maintenant $G(r,p,n)$. F corps, $q \in F \setminus \{0,1\}$. Soit $e \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ le plus petit entier tel que $1 + q + \cdots + q^{e-1} = 0$ et $I := \begin{cases} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, & \text{si } e \neq \infty, \\ \mathbb{Z}, & \text{sinon} \end{cases}$. Soit $f \in \mathbb{N}^*$ et $J := \{0, \dots, f-1\}$.

Définition (Ariki–Koike 94, Broué–Malle 93)**.** pas définition naturelle, mais on en aura besoin par la suite Soit $\boldsymbol{v} = (v_0, \dots, v_{f-1}) \in (F^\times)^f$ tel que

$$v_k/v_l \notin \langle q \rangle. \tag{1}$$

Soit $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{N}^{(I\times J)}$. L'*algèbre d'Ariki–Koike*, ou algèbre de Hecke de type $G(r,1,n)$, est la F-algèbre associative unitaire $\mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q,\boldsymbol{v})$ de présentation donnée par les générateurs $S, T_1, \dots, T_{n-1}$, et les relations

$$\begin{aligned}
&T_i^2 = (q-1)T_i + q, && \\
&T_iT_j = T_jT_i, && \text{si } |i-j| > 1,\\
&T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}, && \\
&\prod_{i\in I}\prod_{j\in J}(S - q^i v_j)^{\Lambda_{ij}} = 0, && \\
&(ST_1)^2 = (T_1S)^2, && \\
&ST_i = T_iS, && \text{si } i \geq 2.
\end{aligned}$$

Déformation de $F[G(r,1,n)]$ avec $r \coloneqq \sum_{i,j}\Lambda_{ij}$. On parle aussi d'algèbre de Hecke cyclotomique de type A. Généralisation de l'algèbre de Hecke de type A et B. On pose $X_1 \coloneqq S$ et $qX_{i+1} \coloneqq T_iX_iT_i$. Famille $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ commutative (Jucys–Murphy) et

$$\Big\{X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}T_w : a_i \in \{0,\dots,r-1\}, w \in \mathfrak{S}_n\Big\},$$

base de $\mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q,\boldsymbol{v})$ sur F (Ariki–Koike). L'élément T_w est défini avec Matsumoto.

Soit $p \mid r$ et supposons que le corps F contient une racine primitive $p$ième $\zeta \in F^\times$ de l'unité. Soit $f \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\zeta^f \in \langle q \rangle$ et on note $\zeta^f = q^\eta$. On définit $\boldsymbol{v}_\zeta \coloneqq (1, \zeta, \dots, \zeta^{f-1})$.

Proposition. *Supposons que $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{N}^{(I\times J)}$ vérifie*

$$\begin{gathered}\Lambda_{i,j} = \Lambda_{i,j'} \eqqcolon \Lambda_i,\\ \Lambda_i = \Lambda_{i+\eta}\end{gathered} \tag{2}$$

pour tout $i \in I$ et $j, j' \in J$. On a un morphisme d'algèbre $\sigma : \mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q,\boldsymbol{v}_\zeta) \to \mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q,\boldsymbol{v}_\zeta)$ donné par

$$\begin{aligned}\sigma(S) &\coloneqq \zeta S,\\ \sigma(T_i) &\coloneqq T_i.\end{aligned}$$

Remarquons que $\boldsymbol{v}_\zeta$ vérifie bien la condition (1) $v_k/v_l \notin \langle q \rangle$.

Définition. On note $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q) \subseteq \mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q,\boldsymbol{v}_\zeta)$ la sous-algèbre des points fixes de σ.

On montre que c'est une algèbre de Hecke de type $G(r,p,n)$ (au sens de BMR). En particulier, c'est une déformation de $F[G(r,p,n)]$. Penser à l'algèbre de Hecke de type D à l'intérieur de celle de type B. On ne fait pas mention de ζ dans $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q)$ car pas de dépendance. En effet,

$$\Big\{X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}T_w : a_i \in \{0,\dots,r-1\}, w \in \mathfrak{S}_n, \sum_i a_i = 0 \pmod p\Big\},$$

base de $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q)$ sur F (Ariki, 1995).

1.3 Algèbres de Hecke carquois

Γ carquois sans boucle. Si V ensemble des sommets de Γ, l'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ est la F-algèbre associative de générateurs $e(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in V^n$ ainsi que $y_1, \dots, y_n$ et $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ soumis aux relations de la Remarque qui suit, avec

$$Q^\Gamma_{ij}(a,b) \coloneqq \delta_{i\neq j}(-1)^{d_{ij}}(b-a)^{d_{ij}+d_{ji}},$$

où d_{ij} est le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. Si Γ sans flèches multiples on a :

$$Q^\Gamma_{ij}(a,b) = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \text{ pas relié à } j, \\ a-b, & i \to j, \\ b-a, & i \leftarrow j, \\ -(b-a)^2, & i \leftrightarrow j. \end{cases}$$

Remarque. Relations, à écrire avant l'exposé :

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in V^n} e(\boldsymbol{v}) = 1, \tag{3}$$
$$e(\boldsymbol{v})e(\boldsymbol{v}') = \delta_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'}e(\boldsymbol{v}), \tag{4}$$
$$y_a e(\boldsymbol{v}) = e(\boldsymbol{v})y_a, \tag{5}$$
$$\psi_a e(\boldsymbol{v}) = e(s_a\cdot\boldsymbol{v})\psi_a, \tag{6}$$
$$y_a y_b = y_b y_a, \tag{7}$$
$$\psi_a y_b = y_b\psi_a \quad \text{if } b \neq a, a+1, \tag{8}$$
$$\psi_a\psi_b = \psi_b\psi_a \quad \text{if } |a-b| > 1, \tag{9}$$
$$\psi_a y_{a+1} e(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} (y_a\psi_a + 1)e(\boldsymbol{v}) & \text{if } v_a = v_{a+1}, \\ y_a\psi_a e(\boldsymbol{v}) & \text{if } v_a \neq v_{a+1}, \end{cases} \tag{10}$$
$$y_{a+1}\psi_a e(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} (\psi_a y_a + 1)e(\boldsymbol{v}) & \text{if } v_a = v_{a+1}, \\ \psi_a y_a e(\boldsymbol{v}) & \text{if } v_a \neq v_{a+1}, \end{cases} \tag{11}$$
$$\psi_a^2 e(\boldsymbol{v}) = Q_{v_a,v_{a+1}}(y_a,y_{a+1})e(\boldsymbol{v}), \tag{12}$$
$$\psi_{a+1}\psi_a\psi_{a+1}e(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \psi_a\psi_{a+1}\psi_a e(\boldsymbol{v}) + \frac{Q_{v_a,v_{a+1}}(y_a,y_{a+1}) - Q_{v_{a+2},v_{a+1}}(y_{a+2},y_{a+1})}{y_a - y_{a+2}}e(\boldsymbol{v}) & \text{if } v_a = v_{a+2}, \\ \psi_a\psi_{a+1}\psi_a e(\boldsymbol{v}) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{13}$$

Pourquoi ces relations étranges ? Cf. théorème suivant.

Théorème (Khovanov–Lauda, Rouquier, 2000's)**.** *La famille* $\{y_1^{a_1}\dots y_n^{a_n}\psi_w : a_i \in \mathbb{N}, w \in \mathfrak{S}_n\}$ *est une base de* $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ *sur* F.

Démonstration. On construit une réalisation polynomiale dans $\oplus_{\boldsymbol{v}\in V^n}F[x_1,\dots,x_n]\mathbf{1}_{\boldsymbol{v}}$, via

$$e(\boldsymbol{w})\cdot\mathbf{1}_{\boldsymbol{v}} \coloneqq \delta_{\boldsymbol{vw}}\mathbf{1}_{\boldsymbol{v}},$$
$$y_a\cdot\mathbf{1}_{\boldsymbol{v}} \coloneqq x_a\mathbf{1}_{\boldsymbol{v}},$$
$$\psi_a\cdot\mathbf{1}_{\boldsymbol{v}} \coloneqq \begin{cases} (x_a - x_{a+1})^{-1}(s_a - 1)\mathbf{1}_{\boldsymbol{v}}, & \text{si } v_a = v_{a+1}, \\ P^\Gamma_{v_a,v_{a+1}}(x_{a+1},x_a)s_a\mathbf{1}_{s_a\cdot\boldsymbol{v}}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où s_a permute les variables x_a et x_{a+1} et $P_{ij}^\Gamma \in F[a,b]$ vérifie $Q_{ij}^\Gamma(a,b) = P_{ij}^\Gamma(a,b)P_{ji}^\Gamma(b,a)$. Une fois qu'on a vérifié que c'est bien une action (beaucoup de relations à vérifier !), le théorème est immédiat. $\square$

Penser à l'autre base. Les éléments ψ_w sont ici définis via un choix d'expression réduite pour w (et en dépendent !). Si $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{N}^{(V)}$, l'algèbre $\mathrm{R}_n^{\mathbf{\Lambda}}(\Gamma)$ s'obtient comme le quotient de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ par les relations

$$y_1^{\Lambda_{v_1}} e(\boldsymbol{v}) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V^n.$$

- Ces algèbres sont naturellement $\mathbb{Z}$-graduées. Mémo : $\deg \psi_i e(\boldsymbol{v}) = d_{ij} + d_{ji}$.
- Pas facile d'écrire une F-base de $\mathrm{R}_n^{\mathbf{\Lambda}}(\Gamma)$ en fonction des générateurs.
- Isomorphismes de catégorification

$$\mathcal{U}_v^-(\mathfrak{g}_\Gamma) \simeq \bigoplus_{n\geq 0}[\mathrm{Proj}\big(\mathrm{R}_n(\Gamma)\big)] \quad \text{(Khovanov–Lauda, Rouquier) mémo : algebra isom,}$$
$$L(\mathbf{\Lambda}) \simeq \bigoplus_{n\geq 0}[\mathrm{Proj}\big(\mathrm{R}_n^{\mathbf{\Lambda}}(\Gamma)\big)] \quad \text{(Kang–Kashiwara) mémo : } \mathcal{U}_v(\mathfrak{g}_\Gamma)\text{-module isom.}$$

$[\mathrm{Proj}]$ = groupe de Grothendieck des modules projectifs gradués finiement engendrés.

1.4 Isomorphisme de Brundan–Kleshchev

Soit Γ_e le carquois cyclique à e sommets. Fin 2000s, Brundan–Kleshchev et indépendamment Rouquier :

Théorème. *Soit $V := \left\{q^i v_j : (i,j) \in I \times J\right\}$ et soit Γ le carquois de sommets V et de flèches $v \to qv$ pour tout $v \in V$. Si $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{N}^{(I\times J)}$ on a un isomorphisme de F-algèbres $\mathrm{H}_n^{\mathbf{\Lambda}}(q,\boldsymbol{v}) \simeq \mathrm{R}_n^{\mathbf{\Lambda}}(\Gamma)$.*

BK donnent toute une famille d'isomorphismes.

Note : Ici $1 \in (F^\times)^1$, vérifie bien la condition (1). $\mathbb{Z}$-graduation, blocs.

Corollaire. *Si $q' \in F \setminus \{0,1\}$ a le même ordre que q alors $\mathrm{H}_n^{\mathbf{\Lambda}}(q') \simeq_F \mathrm{H}_n^{\mathbf{\Lambda}}(q)$.*

« Pressenti » auparavant car on savait que les deux algèbres en question ont la même théorie des représentations.

Corollaire. *On a une $\mathbb{Z}$-graduation (non triviale) sur $\mathrm{H}_n^{\mathbf{\Lambda}}(q,\boldsymbol{v})$.*

Idée de la preuve du théorème. Les sommets de Γ_e est I. Les $e(\boldsymbol{v})$ pour $\boldsymbol{v} \in I^n$ sont les projections sur les sous-espaces propres généralisés simultanés des $X_1, \dots, X_n$ pour les valeurs propres $q^{v_1}, \dots, q^{v_n}$. L'élément y_i est la partie nilpotente de X_i ($y_i = \sum_{\boldsymbol{v}}(1 - q^{-v_i}X_i)e(\boldsymbol{v})$ et ψ_i est de la forme $\psi_i = \sum_{\boldsymbol{v}}(T_i + P_i(\boldsymbol{v}))Q_i(\boldsymbol{v})^{-1}e(\boldsymbol{v})$ avec $P_i(\boldsymbol{v}), Q_i(\boldsymbol{v}) \in F[[y_i, y_{i+1}]]$ (y_i et y_{i+1} sont nilpotents (Brundan–Kleshchev)) $\square$

2 Étude du cas $G(r,p,n)$

On va maintenant montrer comment obtenir les résultats précédents pour l'algèbre de Hecke de type $G(r,p,n)$, donc par exemple, pour les types D et diédraux.

2.1 Restriction de l'isomorphisme de Brundan–Kleshchev et Rouquier à l'algèbre de Hecke de $G(r,p,n)$

Carquois $\Gamma =: \Gamma_{e,f}$ donné par f copies disjointes de Γ_e.

Proposition. *Soit $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{N}^{(I\times J)}$ tel que l'automorphisme σ de $\mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q, \boldsymbol{v}_\zeta)$ soit bien défini (cf. (2)). On peut choisir l'isomorphisme $\mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q, \boldsymbol{v}_\zeta) \simeq \mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma_{e,f})$ de telle sorte que l'automorphisme σ soit donné sur les générateurs de $\mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma_{e,f})$ de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} \sigma\Big(e(\boldsymbol{v})\Big) &= e\Big(\sigma(\boldsymbol{v})\Big), && \forall \boldsymbol{v} \in V^n,\\ \sigma(y_i) &= y_i, \\ \sigma(\psi_i) &= \psi_i, \end{aligned}$$

où σ est donné sur les sommets V de Γ par $v \mapsto \zeta v$. On a dans ce cas $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q) = \mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q, \boldsymbol{v}_\zeta)^\sigma \simeq \mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma_{e,f})^\sigma$.

Exemple. Si $\Gamma = \Gamma_e$ et si $e = p\eta$ alors σ est donnée par $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \\ i & \mapsto & i+\eta \end{array}\right.$. En général, σ saute de copie en copie puis tourne au moment de revenir au début (dessin).

L'automorphisme σ ainsi trouvé est homogène. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition. *La sous-algèbre $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q)$ est une sous-algèbre* graduée *de $\mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q, \boldsymbol{v}_\zeta)$.*

En particulier, il y a une $\mathbb{Z}$-graduation non triviale sur les algèbres de Hecke de type D et diédraux.

2.2 Présentation de « type Hecke carquois » pour l'algèbre de Hecke de $G(r,p,n)$

On veut maintenant obtenir une présentation de $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q)$ qui ressemble à la présentation d'une algèbre de Hecke carquois. On traite un cas général de sous-algèbre de Hecke carquois cyclotomique fixée.

2.2.1 Présentation d'une sous-algèbre de Hecke carquois fixée

Γ un carquois sans boucle, ensemble de sommets V et σ un automorphisme d'ordre fini du carquois Γ. La bijection σ induit naturellement un automorphisme de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$, donné comme avant sur les générateurs par :

$$\begin{aligned} \sigma\Big(e(\boldsymbol{v})\Big) &= e\Big(\sigma(\boldsymbol{v})\Big), \\ \sigma(y_i) &= y_i, \\ \sigma(\psi_i) &= \psi_i. \end{aligned}$$

Pas besoin d'hypothèse sur la caractéristique ici Si de plus $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{N}^{(V)}$ vérifie $\Lambda_{\sigma(v)} = \Lambda_v$ pour tout $v \in V$ alors σ induit un automorphisme de $\mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma)$.

Remarque. σ automorphisme de carquois $\to Q^\Gamma_{\sigma(i)\sigma(j)} = Q^\Gamma_{ij}$.

Théorème (R. 2016)**.** *L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma$ possède la présentation suivante. Les générateurs sont $e(\nu), \nu \in V^n/\langle\sigma\rangle$, $y_1, \dots, y_n$ et $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, et les relations sont obtenues en prenant celles de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$ et en remplaçant les $e(\boldsymbol{v})$ pour $\boldsymbol{v} \in V^n$ par les $e(\nu)$ où $\nu \in V^n/\langle\sigma\rangle$ est la classe de $\boldsymbol{v}$.*

On dit que la présentation obtenue est de « type Hecke carquois ». L'algèbre $\mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma$ n'est a priori pas une algèbre de Hecke carquois.

Exemple. Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $\boldsymbol{v} \in V^n$. Rappelons la relation

$$\psi_i^2 e(\boldsymbol{v}) = Q^\Gamma_{v_i, v_{i+1}}(y_i, y_{i+1}) e(\boldsymbol{v})$$

de $\mathrm{R}_n(\Gamma)$, où $Q^\Gamma_{v_i,v_{i+1}}$ ne dépend que du nombre d'arêtes entre les sommets v_i et v_{i+1}. Cette relation devient dans $\mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma$

$$\psi_i^2 e(\nu) = Q^\Gamma_{\nu_i, \nu_{i+1}}(y_i, y_{i+1}) e(\nu),$$

où $Q^\Gamma_{\nu_i,\nu_{i+1}} \coloneqq Q^\Gamma_{v_i,v_{i+1}}$ ne dépend pas du représentant choisi pour $\nu \in V^n/\langle\sigma\rangle$. Puisque σ est un automorphisme de carquois. Remarquons que ν_i n'a pas de sens tout seul.

On a également une version cyclotomique.

Théorème (R. 2016)**.** *Le théorème précédent est également valable pour* $\mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma)^\sigma$.

L'idée de la preuve est de montrer

$$\mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma)^\sigma \simeq \mathrm{R}_n(\Gamma)^\sigma \Big/ \Big\langle y_1^{\Lambda_{\nu_i}} e(\nu)\Big\rangle_\nu$$

Comme avant, $\Lambda_{\nu_i} \coloneqq \Lambda_{v_i}$ ne dépend pas de l'antécédent $\boldsymbol{v} \in V^n$ choisi pour ν. Pour cela, on montre

$$\langle y_1^{\Lambda_{\nu_i}} e(\nu)\rangle_\nu = \langle y_1^{\Lambda_{v_1}} e(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{v}} \cap \mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma)^\sigma.$$

première preuve en supposant que la caractéristique du corps de base ne divise pas l'entier p, en disant que l'algèbre se surjecte dans ses points fixes en moyennant. On peut se passer de cette hypothèse en calculant « à la main » en utilisant l'orthogonalité des idempotents.

2.2.2 Application à l'algèbre de Hecke de $G(r,p,n)$

En appliquant le résultat précédent à l'isomorphisme $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q) \simeq \mathrm{R}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(\Gamma)^\sigma$, on obtient donc une présentation de $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q)$ de type Hecke carquois.

Exemple. Si $e = p\eta$, le carquois est Γ_e de sommets $V = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, l'application σ est donné comme dans l'exemple précédent par un décalage de η. Les générateurs sont $e(\nu)$ pour $\nu \in V^n/\langle\sigma\rangle$ ainsi que $y_1, \ldots, y_n, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$.

Corollaire. *Si* $q' \in F\backslash\{0,1\}$ *est tel que* e *est le plus petit entier vérifiant* $1 + q' + \cdots + q'^{e-1} = 0$ *alors* $\mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q') \simeq_F \mathrm{H}_{p,n}^{\boldsymbol{\Lambda}}(q)$.

C'est ici un peu moins évident que pour $\mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q') \simeq_F \mathrm{H}_n^{\boldsymbol{\Lambda}}(q)$: il faut faire attention à ce que le décalage sur le carquois, donné par $\eta \in I$ tel que le plus petit entier f tel que $\zeta^f \in \langle q\rangle$ vérifie $\zeta^f = q^\eta$ pour ζ une racine primitive $p$ième, soit le même. Il faut donc montrer qu'il existe une racine primitive $p$ième $\tilde{\zeta}'$ telle que $\zeta'^f = q'^\eta$. Rappelons également que ce résultat contient les types D et diédraux !