

# Partitions d'entiers : cœurs et régularisation

Salim ROSTAM\*

Vendredi 18 octobre 2024

## 1 Asymptotique des partitions

Partition : diagramme de Young (en convention russe).

**Théorème 1.1** (Kerov–Veshik, Logan–Shepp, 1977). *Sous la mesure de Plancherel : convergence uniforme en probabilité sur  $\mathbb{R}$  du diagramme de Young vers une forme limite  $\Omega$  (cf. Figure 1).*

On a aussi la convergence en support.

*Remarque 1.2.* Via la correspondance de Robinson–Schensted, cela répond au **problème d’Ulam** et montre que la longueur d’un plus grand sous-mot croissant d’un élément de  $\mathfrak{S}_n$  tiré uniformément est de l’ordre de  $2\sqrt{n}$ . L’asymptotique à l’ordre supérieur est en  $n^{1/6}$ , et fait apparaître les distributions de Tracy–Widom (et met en évidence une analogie avec la répartition des valeurs propres de certaines matrices aléatoires), voir Baik–Deift–Johansson, Borodin–Okounkov–Olshanski, Johansson, Okounkov.

Une idée globale est de voir l’asymptotique de certaines quantités classiques en combinatoire algébrique, ici : cœurs et régularisations.

## 2 Régularisation de partitions

**Définition 2.1** (Régularisation). On « pousse » les boîtes d’une partition vers la gauche selon une certaine direction fixée.

---

\*Institut Denis Poisson, Université de Tours

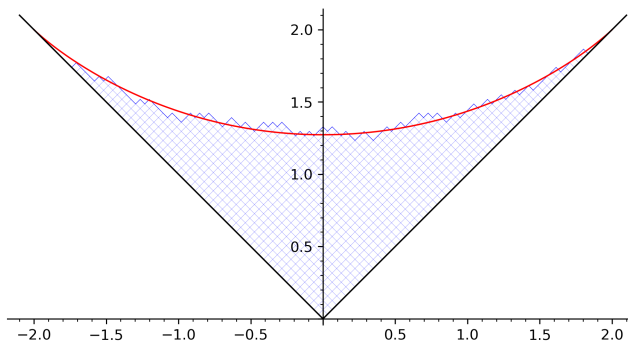


FIGURE 1 – Forme limite d’un diagramme de Young tiré selon la mesure de Plancherel  $P_{1000}$

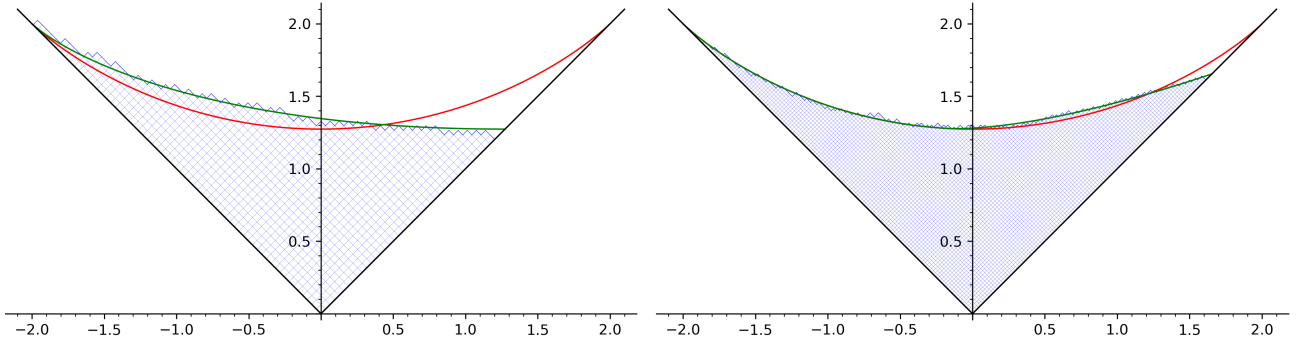


FIGURE 2 – Forme limite (en vert) pour la 2- (resp. 3-)régularisation d’une partition tirée selon  $Pl_{1000}$  (resp.  $Pl_{5000}$ ) ; en rouge la forme limite  $\Omega$ .

*Exemple 2.2.* — Les partitions 2-régulières (les résultats de la 2-régularisations sont celles à part distinctes : ainsi  $(4, 3, 1)$  est 2-régulière mais pas  $(4, 4, 4, 1)$ .

— Une partition est 3-régulière si chaque part se répète au plus 2 fois.

**Théorème 2.3** (R. 23). *Sous la mesure de Plancherel : convergence uniforme en probabilité sur  $\mathbb{R}$  de la  $e$ -régularisation vers le « poussé » (le **secoué**, **shaking** en anglais) de la forme  $\Omega$  (cf. Figure 2).*

On obtient également les asymptotiques des longueurs de la première ligne et de la première colonne.

**Problème 2.4.** Quid des asymptotiques supérieures ?

Les  $e$ -régularisations sont particulièrement simples à étudier car c’est simplement une question de pousser les boîtes le plus possible vers la gauche. Les **(e, i)-régularisations** (introduites par D. Millan Berdasco) sont plus délicates car ce procédé ne donne pas toujours une partition ; on peut cependant définir de façon canonique une opération de  $(e, i)$ -régularisation sur les partitions.

**Problème 2.5.** Pour ces  $(e, i)$ -régularisations, la forme limite semble être aléatoire.

### 3 Cœurs

Frontière d’une partition  $\lambda \rightarrow$  suite  $\mathcal{A}(\lambda)$  de 0 et de 1 et ensemble des descentes.

**Théorème 3.1** (Borodin-Okounkov-Olshanski 2000). *Sous la mesure de Plancherel poissonisée, le processus donné par l’ensemble des descentes est déterminantal.*

Si on fixe  $e \geq 2$ , faire une opération  $(0, *, \dots, *, 1) \rightarrow (1, *, \dots, *, 0)$  où les indices sont distants de  $e$  dans la suite  $\mathcal{A}(\lambda)$  correspond à enlever des « rubans » dans le diagramme de Young de  $\lambda$ . Enlever tous les rubans possibles donne le  **$e$ -cœur** de la partition  $\lambda$ .

**Théorème 3.2** (R. 22). *La taille du  $e$ -cœur converge vers une somme de lois  $\Gamma$  indépendantes.*

La taille des premières lignes et colonnes est donnée par un max d’un vecteur gaussien corrélé.