

Cocktail à base de partition

Salim ROSTAM*

Jeudi 9 mars 2023

1 Représentations complexes du groupe symétrique

1.1 Paramétrisation des représentations irréductibles

Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la théorie des représentations complexes de \mathfrak{S}_n , c'est-à-dire, des morphismes $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$.

Si $\sigma = c_1 \cdots c_r \in \mathfrak{S}_n$ est la décomposition en cycles à supports disjoints, en triant la liste des longueurs des cycles on obtient une suite (décroissante) $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0)$ vérifiant $|\lambda| := \sum_{i=1}^r \lambda_i = n$.

Définition 1.1. Une telle suite λ est appelée **partition de n** .

On note \mathcal{P}_n l'ensemble des partitions de n . Le résultat classique sur la conjugaison des permutations devient donc que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont la même partition associée. On en déduit donc que :

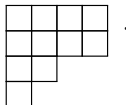
$$\{\text{classes de conjugaison de } \mathfrak{S}_n\} \xrightarrow{1:1} \mathcal{P}_n.$$

On sait donc que les représentations complexes de \mathfrak{S}_n peuvent être indexées par l'ensemble \mathcal{P}_n des partitions de n (ce résultat restant valable sur un corps de caractéristique 0 ou de caractéristique $p > n$).

1.2 Pas n'importe quelle paramétrisation !

On va maintenant voir que l'on peut faire cette indexation de façon à lire à partir de λ la dimension de la représentation associée (c'est une incarnation de la « combinatoire algébrique »).

Définition 1.2. Le **diagramme de Young** d'une partition λ est l'ensemble $\mathcal{Y}(\lambda)$ des boîtes justifiées à gauche telle que la i -ième ligne possède λ_i boîtes.

Exemple 1.3. Le diagramme de Young de $(4, 4, 2, 1)$ est  .

En particulier, le diagramme de Young d'une partition $\lambda \in \mathcal{P}_n$ possède n boîtes. Un **tableau standard** de forme λ est une bijection $t : \mathcal{Y}(\lambda) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ telle que les étiquettes sont croissantes de gauche à droite et de haut en bas. On note $\mathrm{Std}(\lambda)$ l'ensemble (fini) des tableaux standards de forme λ .

*Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes, France

Exemple 1.4. Pour $\lambda = (3, 2)$, l'ensemble $\text{Std}(\lambda)$ possède éléments :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

Théorème 1.5 (Specht 1930'). *On peut indexer par $(S^\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ les représentations complexes irréductibles de \mathfrak{S}_n de sorte que :*

$$\dim S^\lambda = \#\text{Std}(\lambda).$$

De telles représentations peuvent être obtenues en induisant la représentation triviale de $\mathfrak{S}_\lambda := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_n}$ (sous-groupe de Young) à \mathfrak{S}_n .

2 Mesure de Plancherel et forme limite des partitions

La théorie des représentations complexes des groupes finis nous dit que $\#\mathfrak{S}_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} (\dim S^\lambda)^2$. Le Théorème précédent donne donc :

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \#\text{Std}(\lambda)^2.$$

Définition 2.1. La **mesure de Plancherel** sur \mathcal{P}_n est donnée par :

$$\text{Pl}_n(\lambda) := \frac{\#\text{Std}(\lambda)^2}{n!}.$$

Théorème 2.2 (Kerov–Veshik, Logan–Shepp, 1977). *La frontière supérieure du diagramme de Young, tourné d'un angle de $\frac{3\pi}{4}$ et renormalisé, d'une partition tirée selon la mesure de Plancherel, est de plus en plus proche avec n de la courbe de la fonction $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :*

$$\Omega(s) := \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(s \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) + \sqrt{4 - s^2} \right), & \text{si } |s| \leq 2, \\ |s|, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus précisément, la convergence se fait uniformément sur \mathbb{R} en probabilité.

Cette façon de représenter le diagramme de Young d'une partition est la convention **russe**. Une illustration du Théorème est donnée en Figure 1. Ce résultat a été à l'origine démontré en minimisant une intégrale (*hook integral*, « l'intégrale-crochet »). Il peut également se démontrer en exprimant les moments des caractères centraux de \mathfrak{S}_n .

Remarque 2.3. La forme limite Ω est une primitive sur $(-2, 2)$ de la fonction $s \mapsto \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{s}{2}\right)$.

Remarque 2.4. On a également la convergence du support, en particulier $\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}$ converge (en probabilité) vers 2. Notons que λ_1 est la longueur de la première ligne de $\mathcal{Y}(\lambda)$; le même résultat est valable pour la longueur de la première colonne (via la conjugaison — *i.e.* transposition — de partitions). Via la correspondance de Robinson–Schensted entre \mathfrak{S}_n et $\prod_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \text{Std}(\lambda)^2$, cela répond au **problème d'Ulam**, et montre que la longueur d'un plus grand sous-mot croissant d'un élément de \mathfrak{S}_n tiré uniformément est de l'ordre de $2\sqrt{n}$. L'asymptotique à l'ordre supérieur est en $n^{1/6}$, et fait apparaître les distributions de Tracy–Widom (et met en évidence une analogie avec la répartition des valeurs propres de certaines matrices aléatoires), voir Baik–Deift–Johansson, Borodin–Okounkov–Olshanski, Johansson, Okounkov.

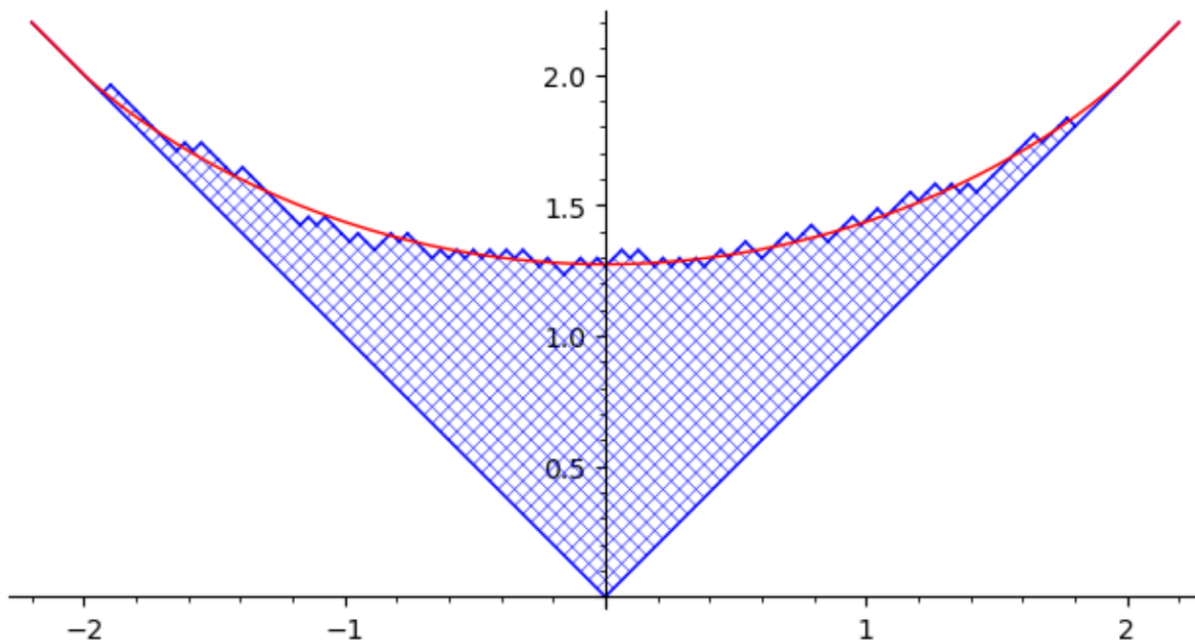


FIGURE 1 – Forme limite d’un diagramme de Young tiré selon la mesure de Plancherel P_{1000}

Remarque 2.5. Kerov–Vershik ont aussi montré un résultat qui concerne la dimension maximale des représentations irréductibles. Plus précisément, il existe des constantes $c_0, c_1 > 0$ telles que si $\lambda_M \in \mathcal{P}_n$ vérifie $\dim S^{\lambda_M} = \max_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \dim S^\lambda$ alors :

$$n! e^{-c_0 \sqrt{n}} \leq \dim S^{\lambda_M} \leq n! e^{-c_1 \sqrt{n}},$$

en particulier, la quantité $\frac{\dim S^{\lambda_M}}{n!}$ décroît plus vite que tout polynôme en n .

3 Représentations modulaires du groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \leq n$ un nombre premier. On s’intéresse maintenant à la théorie des représentations de \mathfrak{S}_n sur \mathbb{F}_p . La différence fondamentale avec le cas complexe est que la théorie des représentations n’est plus semi-simple, c’est-à-dire, certaines représentations ne sont plus sommes de représentations irréductibles.

3.1 Paramétrisation des représentations irréductibles

Par un résultat de Brauer, le nombre de représentations irréductibles d’un groupe fini G sur \mathbb{F}_p est égal au nombre de classes de conjugaisons p -régulières, c’est-à-dire, dont l’ordre des éléments est premier avec p . Puisque l’ordre d’un élément dans la classe de conjugaison correspondant à $\lambda \in \mathcal{P}_n$ est $\text{ppcm}(\lambda_i)$, cela correspond aux partitions dont aucune part n’est divisible par p . On va cependant s’intéresser à un autre sous-ensemble de partitions.

Définition 3.1. Une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \lambda_h > 0)$ est dite p -régulière si aucune part ne se répète p fois ou plus, c’est-à-dire, si $\lambda_i \neq \lambda_{i+p}$ pour tout $i < h - p$.

Exemple 3.2. — Les partitions 2-régulières sont celles à part distinctes : ainsi $(4, 3, 1)$ est 2-régulière mais pas $(4, 4, 1)$.

— La partition $(5, 5, 4, 4, 4, 2)$ est p -régulières ssi $p > 3$.

Proposition 3.3. *Il y a autant de partitions de n dont aucune part n'est divisible par p que de partitions de n qui sont p -régulières.*

Remarque 3.4. Cette Proposition généralise le résultat classique disant qu'il y a autant de partitions de n à parts impairs que de partitions de n à parts distincts.

Les représentations complexes S^λ précédentes peuvent se réaliser sur \mathbb{Z} , c'est-à-dire, comme des morphismes à valeurs dans des $GL_N(\mathbb{Z})$ (par exemple via la **forme normale de Young**). Via réduction modulo p on déduit donc des représentations \bar{S}^λ de \mathfrak{S}_n sur \mathbb{F}_p .

Remarque 3.5. On a de la chance avec \mathfrak{S}_n . De façon générale, si G est un groupe fini (ou plus généralement, une algèbre **symétrique**) alors à une représentation complexe V on peut encore associer une réduction modulo p , mais c'est plus délicat : cela nécessite de choisir un sous-réseau de corps résiduel \mathbb{F}_p , et on montre que l'image de la réduction dans le **groupe de Grothendieck** (représentations à isomorphisme près avec relations $[V] = [V'] - [V'']$ si $V' \simeq V'/V''$), *i.e.* suite des facteurs de composition) ne dépend pas du réseau choisi. On parle alors de **l'application de décomposition**.

Théorème 3.6 (James 1976). *On peut former des quotients D^λ de S^λ de sorte que :*

- le module D^λ est non nul si et seulement si λ est une partition p -régulière ;
- l'ensemble de ces D^λ forme une famille complète de \mathbb{F}_p -représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.

Remarque 3.7. La théorie des algèbres **cellulaires** de Graham–Lehrer (1996) est un cadre systématisant l'énoncé précédent.

Définition 3.8. Si λ est une partition p -régulière, on note S_p^λ la \mathbb{F}_p -représentation irréductible associée.

Remarque 3.9. Contrairement au cas des représentations complexes, on ne connaît cette fois pas de formule donnant la dimension de $S_p^\lambda \dots!$

3.2 Régularisation

Si λ est une partition, on peut donc se poser la question suivante : quelle sont les partitions p -régulières μ telles que le \mathbb{F}_p -module irréductible S_p^μ apparaisse comme facteur de composition de \bar{S}^λ (*i.e.* comment ce dernier se décompose-t-il dans la base des \mathbb{F}_p -modules irréductibles du groupe de Grothendieck) ? Cela revient à déterminer la **matrice de décomposition** de \mathfrak{S}_n sur \mathbb{F}_p .

Le problème de déterminer la matrice de décomposition de \mathfrak{S}_n est très difficile (et non résolu à ce jour). En revanche, de nombreuses informations, partielles, sont connues. Celle que nous allons présenter ici, due à James, détermine l'emplacement d'un entier non nul sur chaque ligne.

On considère l'étiquetage suivant de boîtes :

1	p	$2p - 1$	$3p - 2$	\dots
2	$p + 1$	$2p$	\vdots	\ddots
3	$p + 2$	$2p + 1$	\vdots	\ddots

(attention, ici l'étiquetage n'a rien à voir avec les tableaux standards!). En d'autres termes, on place les éléments de \mathbb{N}^* sur la première colonne, et on ajoute $p - 1$ pour chaque pas vers la droite (en particulier p se trouve directement à droite de 1).

Exemple 3.10. Pour $p = 3$, une partie de l'étiquetage est

1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9

Définition 3.11 (James 1976). — Une boîte étiquetée par i appartient à l'échelle i .

— Si λ est une partition, sa **p -régularisation** est la partition $\text{reg}_p(\lambda)$ obtenue à partir du diagramme de Young de λ en remontant chaque boîte aussi haut possible dans son échelle.

Remarque 3.12. La définition précédente a un sens même si $p \geq 2$ n'est pas premier; dans ce cas on utilisera plutôt la lettre $e \geq 2$. Il y a toujours un sens au niveau de la théorie des représentations, cette fois pour l'**algèbre de Iwahori–Hecke** de \mathfrak{S}_n , qui est une déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ où le paramètre de déformation est une racine primitive complexe e -ième de l'unité.

Proposition 3.13. *Si λ est une partition alors $\text{reg}_p(\lambda)$ est une partition et est p -régulière.*

Exemple 3.14. On va déterminer la 3-régularisation de $\lambda = (4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$. On détermine d'abord les échelles (en rouge, celles qui correspondent aux boîtes du diagramme de Young de λ) :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	
3	5	7	9	
4	6	8		
5	7	9		
6	8			
7	9			
8				
9				

Seules les échelles 8 et 9 ne sont pas justifiées en haut. On bouge le 8 et le 9 du bas pour trouver :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	
3	5	7	9	
4	6	8		
5	7	9		
6	8			
7	9			
(8)				
(9)				

(avec en blue les nouvelles boîtes), donc $\text{reg}_3(\lambda) = (5, 4, 3, 3, 2, 1, 1)$, qui est bien 3-régulière.

Théorème 3.15 (James 1976). *Soit λ une partition. Le \mathbb{F}_p -module irréductible $S_p^{\text{reg}_p(\lambda)}$ apparait exactement une fois dans une suite de composition de \bar{S}^λ .*

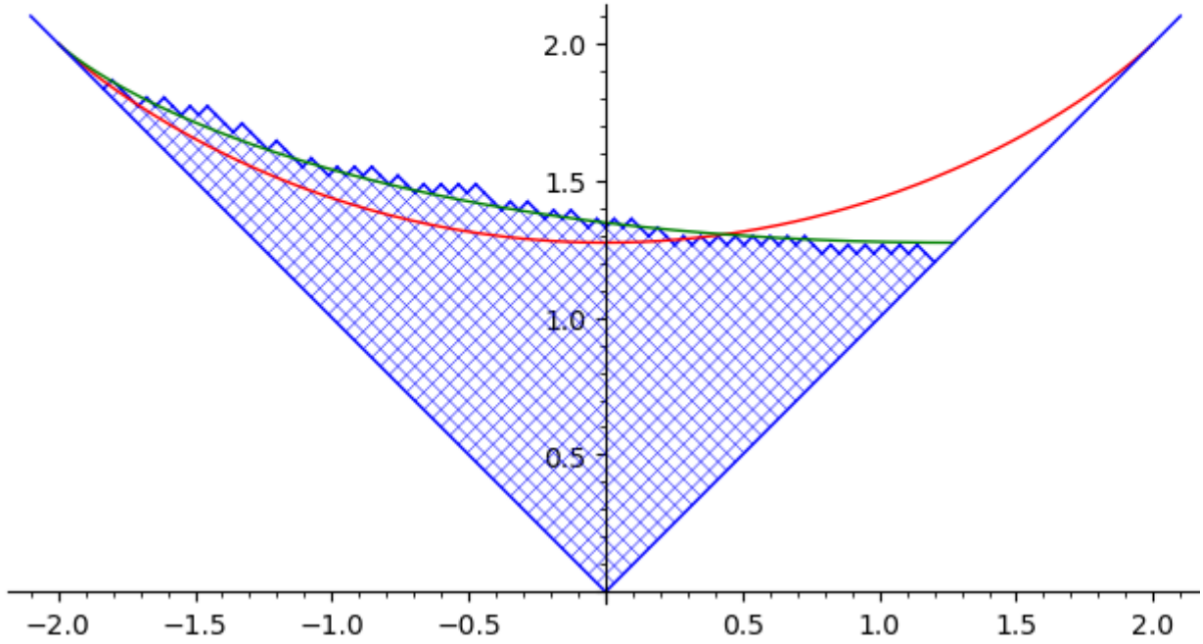


FIGURE 2 – Forme limite (en vert) pour la 2-régularisation d’une partition tirée selon Pl_{1000} ; en rouge la forme limite Ω .

4 Formes limites pour la régularisation de partitions sous la mesure de Plancherel

Rappelons que, sous la mesure de Plancherel, les grandes partitions possèdent la forme limite Ω (cf. Section 2). On se pose alors la question suivante : si $e \geq 2$ et si λ est une grande partition tirée suivant la mesure de Plancherel, la partition $\text{reg}_e(\lambda)$ possède-t-elle une forme limite ?

4.1 Énoncés

Théorème 4.1 (R. 2023). *Oui ! La forme limite Ω_e vérifie une équation de la forme :*

$$\Omega_e(s + \delta_s) = \Omega(s) + (1 - 2e^{-1})\delta_s,$$

où δ_s est défini à partir de l’inverse de $s \mapsto \Omega(s) - (1 - 2e^{-1})s$. Le cas $e = 2$ se simplifie en :

$$\begin{aligned} \Omega_2(2s + \Omega(s)) &= \Omega(s), & \text{pour } s < 0, \\ \Omega_2(s) &= s, & \text{pour } s \geq \Omega(0). \end{aligned}$$

Remarque 4.2 (Cas $e = 2$). Pour $s \leq -2$ on a $2s + \Omega(s) = s$, de plus $\Omega(0) = \frac{4}{\pi}$.

Une illustration du Théorème dans le cas $e = 2$ est donnée en Figure 2. On donne en Figure 3 un exemple de e -régularisation de grande partition pour $e \in \{3, 4\}$. On peut quand même donner une forme simple pour la première asymptotique des longueurs de lignes et de colonne.

Corollaire 4.3 (R. 2023). *Si λ est tirée selon Pl_n , alors :*

- la longueur de la première ligne de $\mathcal{Y}(\text{reg}_e(\lambda))$ est de l’ordre de $2\sqrt{n}$;
- la longueur de la première colonne de $\mathcal{Y}(\text{reg}_e(\lambda))$ est de l’ordre de $\frac{2e\sqrt{n}}{\pi} \sin \frac{\pi}{e}$.

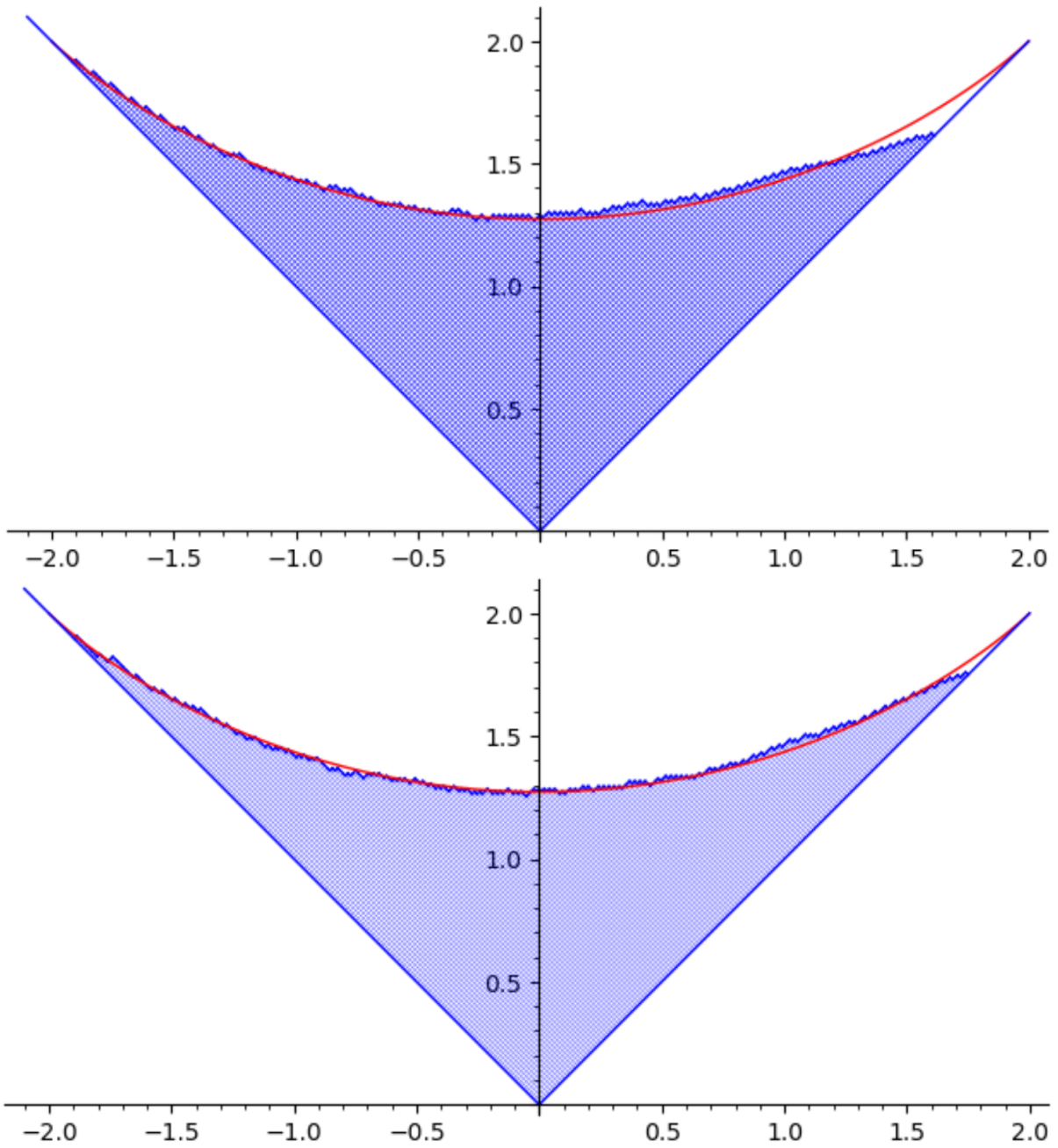


FIGURE 3 – e -régularisation d'une partition tirée selon Pl_{7000} pour $e = 3$ (en haut) et selon Pl_{9000} pour $e = 4$ (en bas) ; en rouge la forme limite Ω .

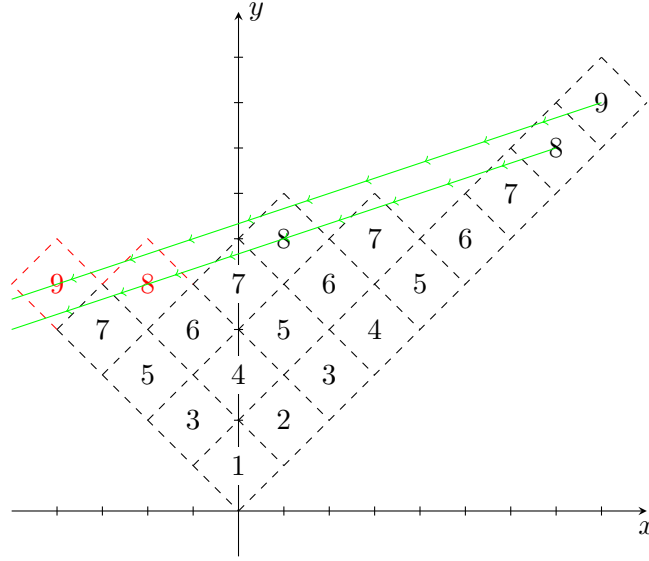


FIGURE 4 – Glissement des boîtes en convention russe pour la 3-régularisation de $\lambda = (4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$

4.2 Secouages

Dans la convention russe, les boîtes de la renormalisation sont obtenues en glissant les boîtes de la partition initiale à gauche le long de la droite d'équation $y = (1 - 2e^{-1})x$. À titre d'illustration, on reprend l'Exemple 3.14 pour la 3-régularisation de $\lambda = (4, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ en Figure 4.

Définition 4.4 (Steiner 1838, Blaschke 1917). Soit $\alpha \geq 0$. Si K est un compact de \mathbb{R}^2 , son **secouage** (« *shaking* ») de direction α (contre la droite d'équation $y = -x$) est le compact $\text{Sh}_\alpha(K)$ de \mathbb{R}^2 obtenu en glissant les différentes tranches de K dans la direction de $y = \alpha x$ jusqu'à rencontrer $y = -x$.

Remarque 4.5. Le procédé introduit par Blaschke est en fait dans le cas où la ligne contre laquelle on projette est orthogonale à la direction, dans le cadre du « problème des quatre points » de Sylvester (« étant donné quatre points du plan, quelle est la probabilité pour que l'enveloppe convexe ait quatre côtés ? » Sylvester, 1865). La définition de Steiner est quand à elle légèrement différente (on translate de façon à avoir une figure finale symétrique par rapport à l'axe de projection), et cette « symétrisation de Steiner » a été utilisée dans le cadre d'une preuve (partielle) de l'inégalité isopérimétrique.

Un exemple de secouage est donné en Figure 5. L'idée de la démonstration du Théorème est alors que la forme limite Ω_e va être obtenue par **secouage** de la forme Ω . Plus précisément, si pour une fonction f on note :

$$\mathbb{Y}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq f(x)\}$$

(c'est la partie du graphe de f qui est au-dessus de la courbe de la valeur absolue) alors Ω_e est la fonction telle que $\mathbb{Y}(\Omega_e) = \text{Sh}_{1-2e^{-1}}(\mathbb{Y}(\Omega))$. Une illustration dans le cas $e = 2$ est donnée en Figure 6, et une autre dans le cas $e = 3$ (sans la forme limite) est donnée en Figure 7. Cela explique la valeur pour la partie maximale du support obtenue dans le Corollaire, qui correspond

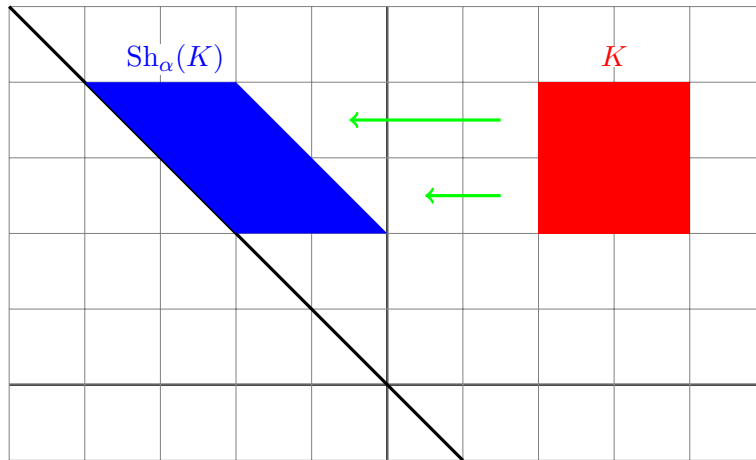


FIGURE 5 – Exemple de secouage Sh_α pour $\alpha = 0$

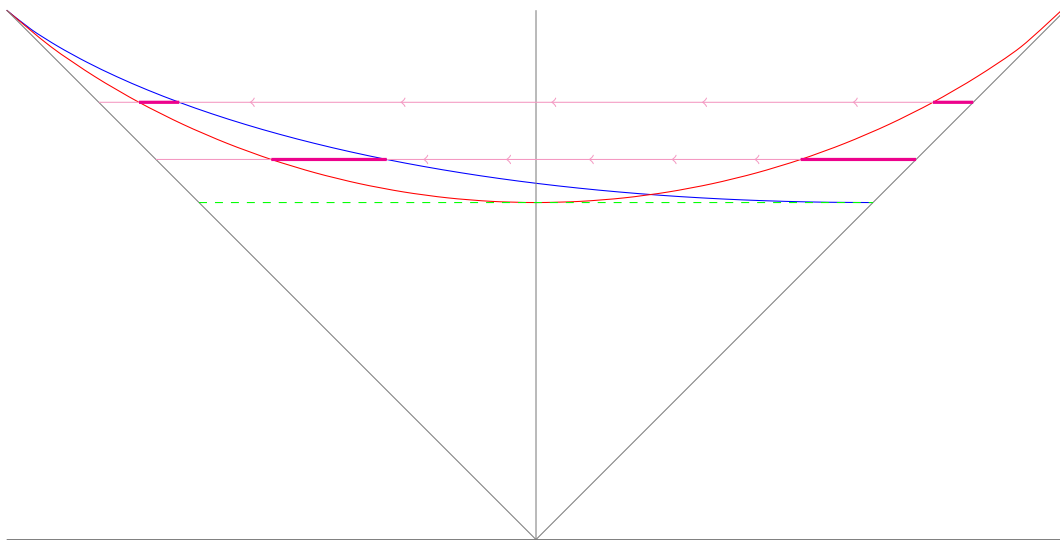


FIGURE 6 – Les formes Ω_2 (en bleu) et Ω (en rouge). En vert la tangente à Ω en 0. Les segments magentas de gauche sont ce qui est « ajouté » à la forme Ω , et proviennent des segments magentas de droite via le secouage de $\mathbb{Y}(\Omega)$.

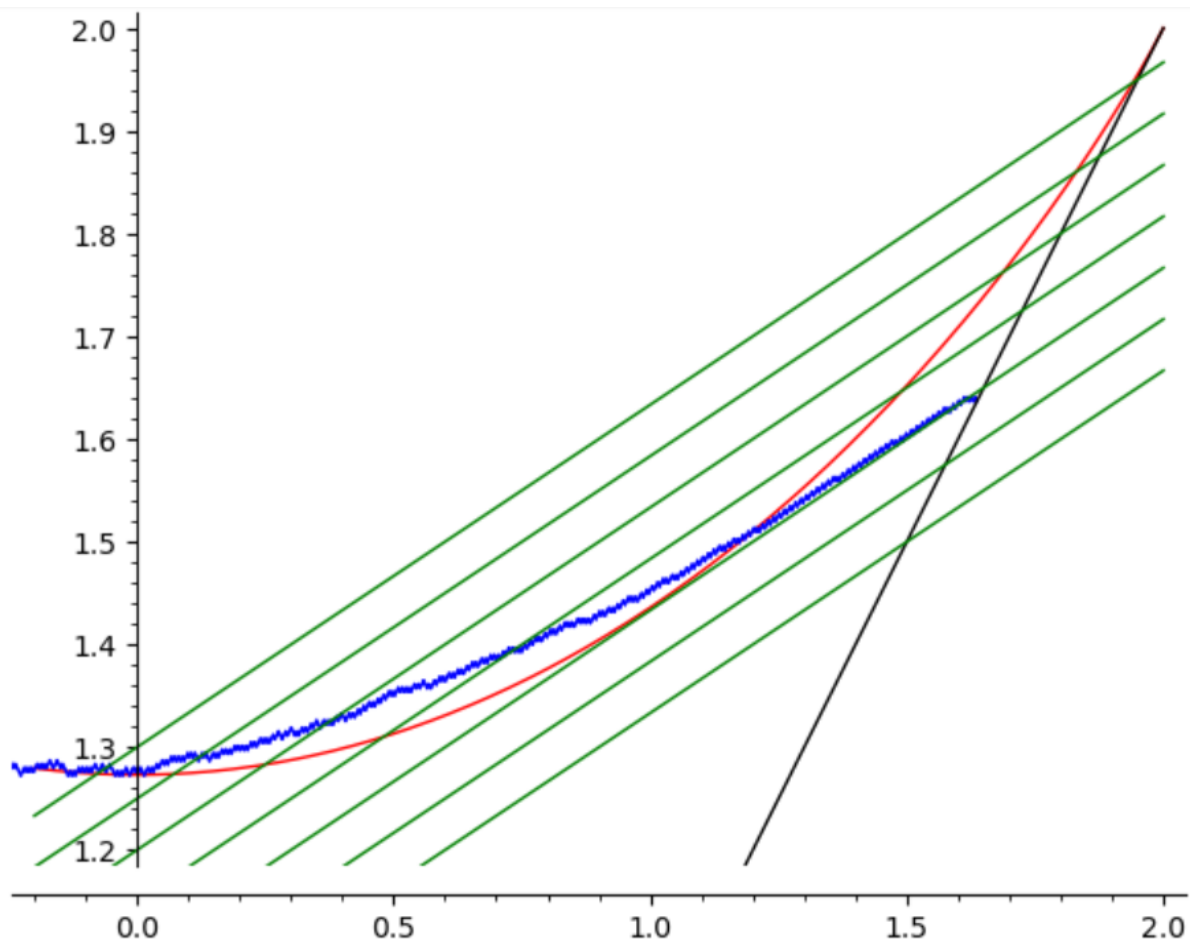


FIGURE 7 – Le secouage de la forme Ω_0 (en rouge) pour $e = 3$ approche la 3-régularisation de grandes partitions (en bleu).

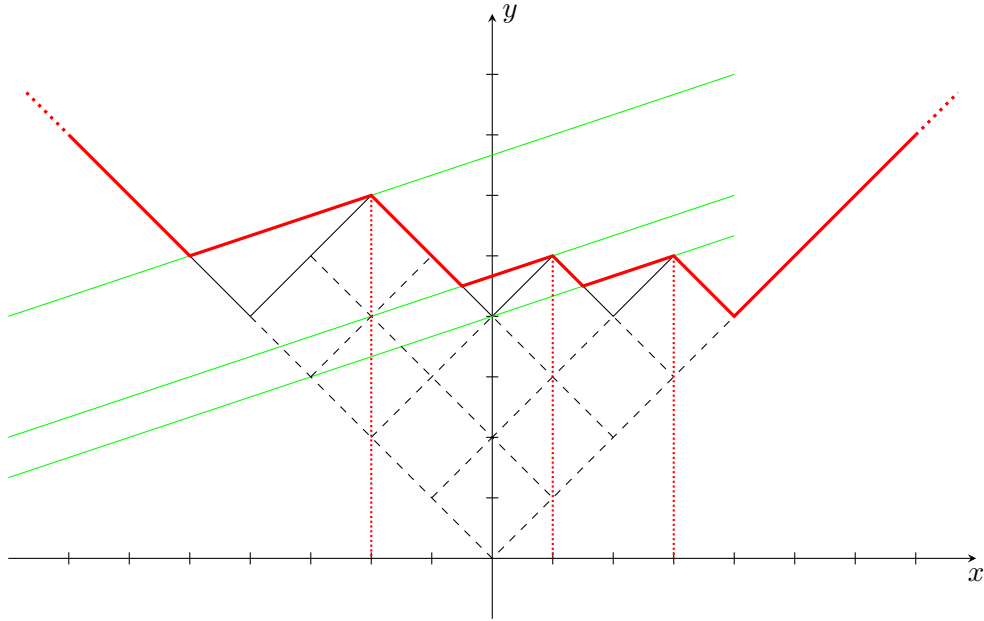


FIGURE 8 – Partie stable par secouage pour $e = 3$ et $\lambda = (4, 4, 2, 1)$

en fait au point d'intersection avec $y = x$ de l'unique **tangente** à la courbe de Ω qui a pour pente $1 - 2e^{-1}$.

Plusieurs points restent alors à établir pour terminer la démonstration.

1. L'ensemble $\text{Sh}_{1-2e^{-1}}(\mathbb{Y}(\Omega))$ est bien le graphe d'une fonction : on trouve d'abord une expression paramétrique via la définition du secouage.
2. Si λ est proche de Ω alors $\text{reg}_e(\lambda)$ est proche de Ω_e . Il suffit de remarquer les points suivants :
 - le secouage des diagrammes russes de λ et $\text{reg}_e(\lambda)$ sont les mêmes ;
 - le diagramme russe de $\text{reg}_e(\lambda)$ n'est pas nécessairement stable par secouage, en revanche on peut le coincer entre deux parties proches et stables par secouage (une telle partie est donnée en Figure 8) ;
 - l'opération de secouage préserve les inclusions (propriété classique des secouages).