Algèbres de Yokonuma–Hecke et de Hecke carquois

Salim Rostam

Journée de l'ANR ACORT
Amiens, le 27/05/2016

1 Background

$n \in \mathbb{N}^*, e > 2, I \coloneqq \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, \Lambda = (\Lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I, F$ corps, $q \in F^\times$ d'ordre e. On note $\ell \coloneqq \sum_i \Lambda_i$.

Définition (Algèbre de Hecke de type $G(\ell, 1, n)$ cyclotomique $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$, ou algèbre d'Ariki–Koike)**.** C'est la F-algèbre de générateurs :

$$X_1, \dots, X_n,$$
$$T_1, \dots, T_{n-1},$$

et de relations :

$$X_a X_b = X_b X_a,$$
$$\prod_{i\in I} (X_1 - q^i)^{\Lambda_i} = 0, \tag{Cyclo}$$
$$T_a^2 = (q-1)T_a + q, \qquad \Big((T_a - 1)(T_a + q) = 0\Big) \tag{Ordre}$$
$$T_a X_{a+1} = X_a T_a + (q-1)X_{a+1}, \qquad \Big(qX_{a+1} = T_a X_a T_a\Big) \tag{Comm}$$
$$+ \text{ autres (dont tresses)}.$$

Exemple. Si $\ell = \sum_i \Lambda_i = 1$, on retrouve l'algèbre de Iwahori–Hecke de $\mathfrak{S}_n$ usuelle. En particulier, si de plus $q \mapsto 1$, on obtient $\begin{matrix} \mathcal{H}_n^\Lambda(q)_{q\mapsto 1} & \simeq & F\mathfrak{S}_n \\ T_a & \leftrightarrow & s_a = (a, a+1) \end{matrix}$.

Définition (Algèbre de Hecke carquois cyclotomique $\mathcal{R}_n^\Lambda(Q)$)**.** Soit $Q = (Q_{ii'})_{i,i'\in I}$ avec $Q_{ii'}$ polynômes bivariés. Générateurs :

$$e(\underline{i}), \underline{i} \in I^n,$$
$$y_1, \dots, y_n,$$
$$\psi_1, \dots, \psi_{n-1}.$$

Relations :

$$
\begin{gathered}
e(\underline{i})e(\underline{i}') = \delta_{\underline{i},\underline{i}'}e(\underline{i}), \qquad \sum_{\underline{i}\in I^n} e(\underline{i}) = 1,\\
y_a e(\underline{i}) = e(\underline{i})y_a, \qquad \psi_a e(\underline{i}) = e(s_a\cdot \underline{i})\psi_a,\\
y_a y_b = y_b y_a\\
y_1^{\Lambda_{i_1}} e(\underline{i}) = 0 \qquad \text{(Cyclo)}\\
\psi_a^2 e(\underline{i}) = Q_{i_a,i_{a+1}}(y_a, y_{a+1})e(\underline{i}), \qquad \text{(Ordre)}\\
\psi_a y_{a+1} e(\underline{i}) = (y_a\psi_a + \delta_{i_a,i_{a+1}})e(\underline{i}), \qquad \text{(Comm)}\\
+ \text{ autres (dont « tresses »)}
\end{gathered}
$$

Exemple. $(e = 4)$ dessin de Γ_e.

$$
Q^{[e]}_{i,i'}(u,v) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } i = i',\\ 1 & \text{si } i \not- i',\\ v-u & \text{si } i \to i',\\ u-v & \text{si } i \leftarrow i'.\end{cases}
$$

On obtient l'algèbre de Hecke carquois cyclotomique de type A $\mathcal{R}_n^\Lambda(\Gamma_e) \coloneqq \mathcal{R}_n^\Lambda(Q^{[e]})$.

Motivations. Comprendre la théorie des représentations de $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$. Contrôlée par une « matrice de décomposition » D. Théorème d'Ariki (2002) : il existe une matrice $D(v)$ (construite à partir d'algèbre sur des groupes quantiques) telle que $D = D(1)$. Question : interprétation de $D(v)$ en terme de théorie des représentations ? C'est pour ça que Khovanov–Lauda (2009) et indépendemment Rouquier (2008) ont introduit les algèbres de Hecke carquois. Plus précisément, on a $\mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g}) \simeq [\mathrm{Proj}(\mathcal{R}_n)]$ et $\mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g}).\emptyset_\Lambda = [\mathrm{Proj}(\mathcal{R}_n^\Lambda)]$; la matrice de la « base canonique » construite par Lusztig dans la base standard de l'espace de Fock associé (indexée par les multipartitions) $\mathcal{F} \coloneqq \oplus_{\lambda\models}\mathbb{Q}(v)\lambda$ est $D(v)$. L'algèbre de Hecke carquois cyclotomique a catégorifié cela.

Théorème (Brundan–Kleshchev [BrKl] et Rouquier [Rou], 2009)**.** *$\mathcal{H}_n^\Lambda(q) \simeq \mathcal{R}_n^\Lambda(\Gamma_e)$.*

Remarque. — $\mathcal{R}_n^\Lambda(\Gamma_e)$ ne dépend de q que via e. Ainsi, si $q' \in F^\times$ est aussi d'ordre e alors $\mathcal{H}_n^\Lambda(q) \simeq \mathcal{H}_n^\Lambda(q')$.
— L'algèbre $\mathcal{R}_n^\Lambda(\Gamma_e)$ est naturellement graduée $\rightsquigarrow$ graduation sur $\mathcal{H}_n^\Lambda(q)$.

Idée de la preuve de [BrKl]. On construit des morphismes d'algèbre :

$$
\begin{gathered}
f : \mathcal{H}_n^\Lambda(q) \to \mathcal{R}_n^\Lambda(\Gamma_e),\\
g : \mathcal{R}_n^\Lambda(\Gamma_e) \to \mathcal{H}_n^\Lambda(q)
\end{gathered}
$$

(sur les générateurs).

1$^{\text{re}}$étape Qu'est-ce que $g(e(\underline{i}))$?

Dans $M \coloneqq \mathcal{H}_n^\Lambda(q)$, on considère pour $\underline{i} \in I^n$:

$$
M(\underline{i}) \coloneqq \{m \in M : (X_a - q^{i_a})^N m = 0\ \forall a\},
$$

où $N \gg 0$. On a $M = \oplus_{\underline{i}\in I^n} M(\underline{i})$, et on considère $\hat{e}(\underline{i})$ la projection sur $M(\underline{i})$ parallèlement à $\oplus_{\underline{i}'\neq\underline{i}} M(\underline{i}')$. L'élément $\hat{e}(\underline{i})$ est un polynôme en $X_1, \dots, X_n$ donc $\hat{e}(\underline{i}) \in \mathcal{H}_n^\Lambda(q)$. On pose $g(e(\underline{i})) \coloneqq \hat{e}(\underline{i})$.

2ᵉétape On considère des polynômes $P_a(\underline{i}), Q_a(\underline{i})^{\pm 1}$ en y_a, y_{a+1}. On pose :

$$g(y_a) \coloneqq \sum_{\underline{i} \in I^n} (1 - q^{-i_a} X_a)\hat{e}(\underline{i}),$$
$$g(\psi_a) \coloneqq \sum_{\underline{i} \in I^n} (T_a + P_a(\underline{i}))Q_a(\underline{i})^{-1}\hat{e}(\underline{i}),$$

et :

$$f(X_a) \coloneqq \sum_{\underline{i} \in I^n} q^{i_a}(1 - y_a)e(\underline{i}),$$
$$f(T_a) \coloneqq \sum_{\underline{i} \in I^n} (\psi_a Q_a(\underline{i}) - P_a(\underline{i}))e(\underline{i}).$$

— Les applications f et g sont bien des morphismes d'algèbres (calculs fastidieux).
— Les morphismes f et g sont inverses l'un de l'autre (sur les générateurs).

2 Extension dans le cas Yokonuma–Hecke

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{char}(F)$ ne divise pas d. On pose $J \coloneqq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Définition (Algèbre de Yokonuma–Hecke de type A cyclotomique $\mathrm{Y}^{\Lambda}_{d,n}(q)$)**.** C'est la F-algèbre de générateurs :

$$X_1, \dots, X_n,$$
$$T_1, \dots, T_{n-1},$$
$$t_1, \dots, t_n,$$

avec les même relations que pour $\mathcal{H}^{\Lambda}_n(q)$, où (Ordre) est remplacée par :

$$T_a^2 = (q-1)T_a e_a + q, \tag{Ordre'}$$

où $e_a \coloneqq \frac{1}{d}\sum_{j \in J} t_a^j t_{a+1}^{-j}$, avec les relations supplémentaires suivantes :

$$t_a t_b = t_b t_a,$$
$$t_a^d = 1,$$
$$t_a X_b = X_b t_a,$$
$$t_a T_b = T_b t_{s_b(a)}.$$

Remarque. — Si $\ell = \sum_{\underline{i}} \Lambda_i = 1$, on retrouve l'algèbre de Yokonuma–Hecke classique : c'est une déformation de $G(d, 1, n)$.
— Si on spécialise chaque $t_a \to 1$ (ou si $d = 1$), chaque e_a devient 1, (Ordre) devient (Ordre') et on retrouve donc l'algèbre d'Ariki–Koike $\mathcal{H}^{\Lambda}_n(q)$: c'est une déformation de $G(\ell, 1, n)$.

Ces algèbres ont été introduites par Yokonuma [Yo] dans les années 60. Grâce à de nouvelles présentations (par Juyumaya [Ju1, Ju2] notamment), elles ont une interprétation topologique naturelle en théorie des tresses / des nœuds.

On veut montrer que $\mathrm{Y}^{\Lambda}_{d,n}(q)$ est isomorphe à une certaine algèbre de Hecke carquois cyclotomique... pour un carquois à déterminer !

Dans le cas $\mathcal{H}^{\Lambda}_n(q)$, on avait :

$$f(X_a) = \underbrace{\sum_{\underline{i}} q^{i_a} e(\underline{i})}_{\text{diagonalisable}} - \underbrace{\sum_{\underline{i}} q^{i_a} y_a e(\underline{i})}_{\text{nilpotent}}.$$

Chaque t_a étant diagonalisable (on suppose F assez grand), on a donc envie de poser :

$$f(t_a) \coloneqq \sum_{\underline{j}\in J^n} \zeta^{j_a} e(\underline{j}),$$

où $\zeta \in F^\times$ est une racine primite $d^{\text{ième}}$ de l'unité. Pour $(\underline{i},\underline{j}) \in I^n \times J^n$, avec $M \coloneqq \mathrm{Y}^\Lambda_{d,n}(q)$ on considère :

$$M(\underline{i},\underline{j}) \coloneqq \{m \in M : \forall a, (X_a - q^{i_a})^N m = 0, (t_a - \zeta^{j_a})m = 0\},$$

où $N \gg 0$. On a encore une fois :

$$\bigoplus_{\substack{\underline{i}\in I^n\\ \underline{j}\in J^n}} M(\underline{i},\underline{j}) = M,$$

et on considère $\hat{e}(\underline{i},\underline{j})$ la projection sur $M(\underline{i},\underline{j})$ parallèlement à $\oplus_{(\underline{i}',\underline{j}')\neq(\underline{i},\underline{j})} M(\underline{i}',\underline{j}')$. On pose :

$$\hat{e}(\underline{i}) \coloneqq \sum_{\underline{j}\in J^n} \hat{e}(\underline{i},\underline{j}),$$
$$\hat{e}(\underline{j}) \coloneqq \sum_{\underline{i}\in I^n} \hat{e}(\underline{i},\underline{j}).$$

Comme $I^n \times J^n \simeq (I \times J)^n$, on a donc une idée de notre carquois !

Exemple. Cas $e = 2$ et $d = 2$, dessin de $I \times J$.

Remarque (Remarque fondamentale). Soit $j \in J^n$ et $a \in \{1, \ldots, n\}$.

— Si $j_a = j_{a+1}$ alors :

$$t_a\hat{e}(\underline{j}) = \zeta^{j_a}\hat{e}(\underline{j}) = \zeta^{j_{a+1}}\hat{e}(\underline{j}) = t_{a+1}\hat{e}(\underline{j}),$$

donc :

$$e_a\hat{e}(\underline{j}) = \frac{1}{d}\sum_{j\in J}\left(\frac{t_a}{t_{a+1}}\right)^j \hat{e}(\underline{j}) = \hat{e}(\underline{j}).$$

Donc (Ordre') devient :

$$T_a^2\hat{e}(\underline{j}) = (q-1)T_a\hat{e}(\underline{j}) + q\hat{e}(\underline{j}),$$

donc on retrouve (Ordre') !

— Si $j_a \neq j_{a+1}$, on obtient cette fois $e_a\hat{e}(\underline{j}) = \frac{1}{d}\sum_{j\in J}(\zeta^{j_a - j_{a+1}})^j\hat{e}(\underline{j}) = 0$, donc (Ordre') devient :

$$T_a^2\hat{e}(\underline{j}) = q\hat{e}(\underline{j}).$$

$\to$ on retrouve la relation de $F\mathfrak{S}_n$.

On pose maintenant :

$$P_a(\underline{i},\underline{j}) \coloneqq \begin{cases} P_a(\underline{i}) & \text{if } j_a = j_{a+1},\\ 0 & \text{if } j_a \neq j_{a+1},\end{cases} \qquad Q_a(\underline{i},\underline{j}) \coloneqq \begin{cases} Q_a(\underline{i}) & \text{if } j_a = j_{a+1},\\ \sqrt{q} & \text{if } j_a \neq j_{a+1}.\end{cases}$$

et :

$$g(y_a) \coloneqq \sum_{\underline{i}\in I^n}(1 - q^{-i_a}X_a)\hat{e}(\underline{i})$$
$$g(\psi_a) \coloneqq \sum_{\substack{\underline{i}\in I^n\\ \underline{j}\in J^n}}(T_a + P_a(\underline{i},\underline{j}))Q_a(\underline{i},\underline{j})^{-1}\hat{e}(\underline{i},\underline{j}),$$

et :

$$f(X_a) \coloneqq \sum_{\underline{i}\in I^n} q^{i_a}(1-y_a)e(\underline{i}),$$
$$f(T_a) \coloneqq \sum_{\substack{\underline{i}\in I^n\\ \underline{j}\in J^n}} (\psi_a Q_a(\underline{i},\underline{j}) - P_a(\underline{i},\underline{j}))e(\underline{i},\underline{j}),$$
$$f(t_a) \coloneqq \sum_{\underline{j}\in J^n} \zeta^{j_a} e(\underline{j}).$$

Il faut maintenant vérifier que les différentes relations sont vérifiées : vérifions par exemple $\psi_a y_{a+1} e(\underline{i},\underline{j}) = (y_a\psi_a + \delta_{(i_a,j_a),(i_{a+1},j_{a+1})}e(\underline{i},\underline{j})$. On doit montrer :

$$(T_a + P_a(\underline{i},\underline{j}))Q_a(\underline{i},\underline{j})^{-1}(1-q^{i_{a+1}}X_{a+1})\hat{e}(\underline{i},\underline{j}) \\ = \left[(1-q^{i_{a+1}}X_a)(T_a+P_a(\underline{i},\underline{j}))Q_a(\underline{i},\underline{j})^{-1} + \delta_{(i_a,j_a),(i_{a+1},j_{a+1})}\right]\hat{e}(\underline{i},\underline{j}).$$

— Si $j_a = j_{a+1}$ c'est vrai d'après [BrKl] ;
— Si $j_a \neq j_{a+1}$ la relation devient :

$$T_a X_{a+1}\hat{e}(\underline{i},\underline{j}) = X_a T_a \hat{e}(\underline{i},\underline{j}),$$

ce qui est vrai par définition de X_{a+1} car $T_a^2 e(\underline{j}) = qe(\underline{j})$!

3 Observations

On a $\Gamma = \amalg_{j\in J}\Gamma_e$. [Lu, JaPA, PA] ont montré l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Y}^\Lambda_{d,n}(q) \simeq \bigoplus_{\lambda\vDash_d n} \mathrm{Mat}_{m_\lambda}\mathcal{H}^\Lambda_\lambda(q),$$

où $\mathcal{H}^\Lambda_\lambda(q)$ est un produit tensoriel du type $\mathcal{H}^\Lambda_\lambda(q) \coloneqq \mathcal{H}^{\Lambda^1}_{\lambda_1}(q)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}^{\Lambda^d}_{\lambda_d}(q)$. C'est en fait un résultat général sur les algèbres de Hecke carquois.

Théorème. *Si $\Gamma = \amalg_{j\in J}\Gamma_j$ alors :*

$$\mathcal{R}_n(\Gamma) \simeq \bigoplus_{\lambda\vDash_d n} \mathrm{Mat}_{m_\lambda}\mathcal{R}_\lambda(\Gamma),$$

où $\mathcal{R}_\lambda(\Gamma) \coloneqq \mathcal{R}_{\lambda_1}(\Gamma_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{R}_{\lambda_d}(\Gamma_d)$. L'isomorphisme passe au quotient cyclotomique.

Idée de la preuve. Ensemble des sommets $I = \amalg_{j\in J} I_j$. Si $\underline{i}\in I^n$, on associe un élément $\sigma\in J^n$ par $i_a \in I_j \iff \sigma_a = j$. En considérant des éléments π_σ, éléments de longeur minimale pour les éléments de $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda$, on se ramène aux sous-algèbres $e(\sigma^\lambda)\mathcal{R}_n(\Gamma)e(\sigma^\lambda) \simeq \mathcal{R}_\lambda(\Gamma)$, où $e(\sigma^\lambda) \coloneqq \sum_{\underline{i}\in I_1^{\lambda_1}\times\cdots\times I_d^{\lambda_d}} e(\underline{i})$. On fait cela en considérant des morphismes :

$$\begin{array}{rcl} e(\sigma')\mathcal{R}_n(\Gamma)e(\sigma) & \leftrightarrow & \mathcal{R}_\lambda(\Gamma)E_{\sigma',\sigma} \\ w & \mapsto & (\psi_{\pi_{\sigma'}} w \psi_{\pi_\sigma^{-1}})E_{\sigma',\sigma} \\ \psi_{\pi_{\sigma'}^{-1}} v \psi_{\pi_\sigma} & \leftarrow\!\shortmid & rE_{\sigma',\sigma} \end{array}$$

□

Références

[ArKo] S. Ariki and K. Koike, *A Hecke algebra of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations*. Adv. Math. **106** (1994) 216–243.

[BrKl] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov–Lauda algebras*. Invent. Math. **178** (2009) 451–484.

[ChPou] M. Chlouveraki and G. Pouchin, *Representation theory and an isomorphism theorem for the framisation of the Temperley–Lieb algebra*. arXiv :1503.03396v2.

[ChPA] M. Chlouveraki and L. Poulain d'Andecy, *Representation theory of the Yokonuma–Hecke algebra*. Adv. Math. **259** (2014) 134–172.

[ChPA2] M. Chlouveraki and L. Poulain d'Andecy, *Markov traces on affine and cyclotomic Yokonuma–Hecke algebras*. Int. Math. Res. Notices (2015) rnv257.

[CuWa] W. Cui and J. Wan, *Modular representations and branching rules for affine and cyclotomic Yokonuma–Hecke algebras*. arXiv :1506.06570v2.

[JaPA] N. Jacon and L. Poulain d'Andecy, *An isomorphism Theorem for Yokonuma–Hecke algebras and applications to link invariants*. arXiv :1501.06389v2.

[Ju1] J. Juyumaya, *Sur les nouveaux générateurs de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, U, 1)$*. J. Algebra **204** (1998) 49–68.

[Ju2] J. Juyumaya, *Markov traces on the Yokonuma–Hecke algebra*. J. Knot Theory Ramifications **13** (2004) 25–39.

[JuKa] J. Juyumaya and S. Kannan, *Braid relations in the Yokonuma–Hecke algebra*. J. Algebra **239** (2001) 272–297.

[KhLau1] M. Khovanov and A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*. Represent. Theory **13** (2009) 309–347.

[KhLau2] M. Khovanov and A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II*. Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011) 2685–2700.

[Lu] G. Lusztig, *Character sheaves on disconnected groups* VII. Represent. Theory (electronic) **9** (2005) 209–266.

[PA] L. Poulain d'Andecy, *Invariants for links from classical and affine Yokonuma–Hecke algebras*. arXiv :1602.05429v1.

[Rou] R. Rouquier, *2–Kac–Moody algebras*. arXiv :0812.5023v1.

[Yo] T. Yokonuma, *Sur la structure des anneaux de Hecke d'un groupe de Chevalley fini*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **264** (1967) 344–347.