Arithmétique de l'infini

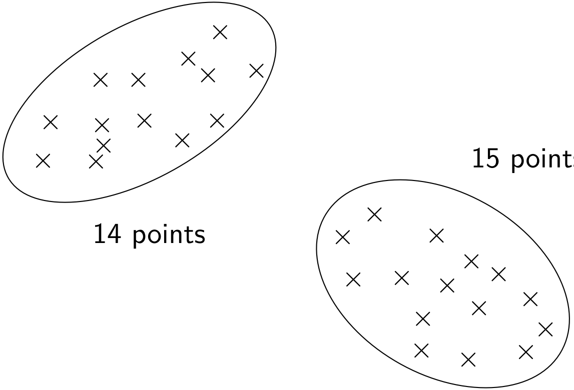
Salim Rostam

École normale supérieure de Rennes

Vendredi 9 octobre 2020
Fête de la Science
Lycée Douanier Rousseau, Laval

1. $\infty + 1$
2. Un seul infini continu (« avec des traits »)
3. Un seul infini dénombrable (« avec des points »)
4. Infini continu $>$ infini dénombrable

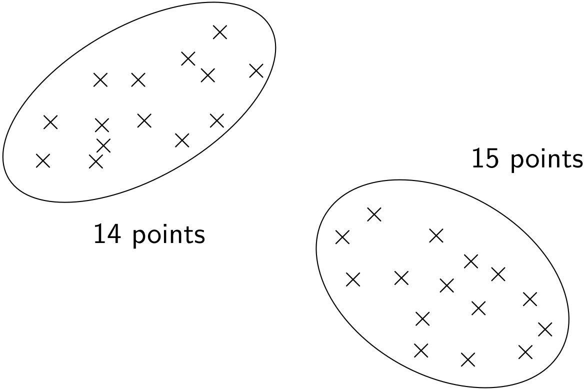
Des grands ensembles



Observation

Si n est assez grand alors $n \approx n+1$.

Des grands ensembles



Observation

Si n est assez grand alors $n \approx n+1$.

Question

Si « $n = \infty$ », a-t-on « $\infty = \infty + 1$ » ?

Beaucoup de nombres entiers

Observation

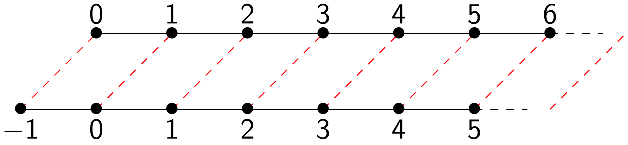
$\mathbb{N}$ est strictement plus petit que $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Beaucoup de nombres entiers

Observation

$\mathbb{N}$ est strictement plus petit que $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Cependant, on a la situation suivante :

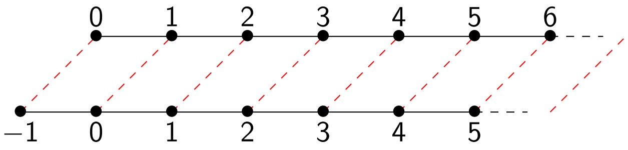


Beaucoup de nombres entiers

Observation

$\mathbb{N}$ est strictement plus petit que $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Cependant, on a la situation suivante :



Conclusion

Il y a autant d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

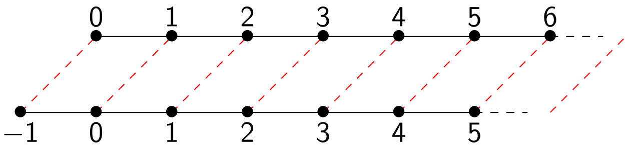
On a utilisé la fonction $f : \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$.

Beaucoup de nombres entiers

Observation

$\mathbb{N}$ est strictement plus petit que $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Cependant, on a la situation suivante :



Conclusion

Il y a autant d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N} \cup \{-1\}$.

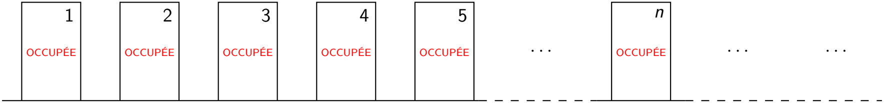
On a utilisé la fonction $f : \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$.

Définition

On dira que deux ensembles ont le **même « nombre » d'éléments** si on peut relier leurs éléments deux à deux.

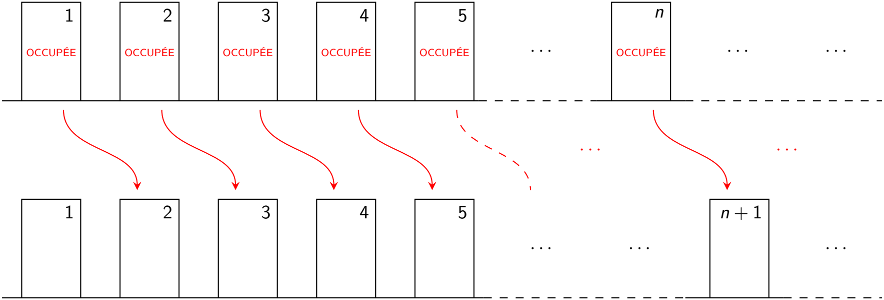
L'hôtel de HILBERT, épisode 1 : un client arrive

Une autre façon d'interpréter la conclusion précédente est la suivante, imaginée par le mathématicien allemand David HILBERT (1862–1943).



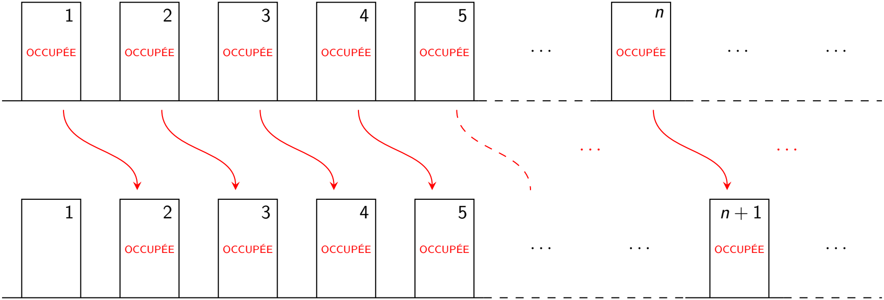
L'hôtel de Hilbert, épisode 1 : un client arrive

Une autre façon d'interpréter la conclusion précédente est la suivante, imaginée par le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943).



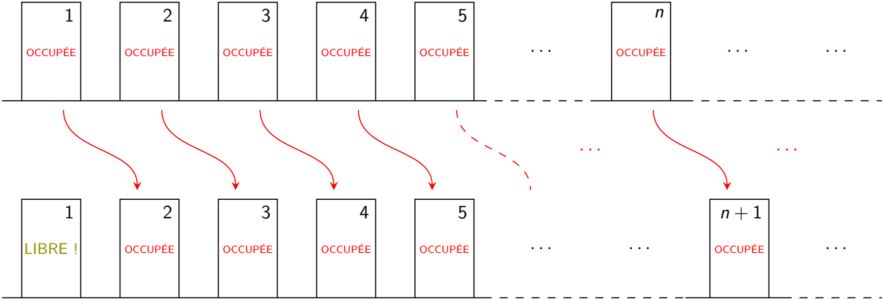
L'hôtel de HILBERT, épisode 1 : un client arrive

Une autre façon d'interpréter la conclusion précédente est la suivante, imaginée par le mathématicien allemand David HILBERT (1862–1943).



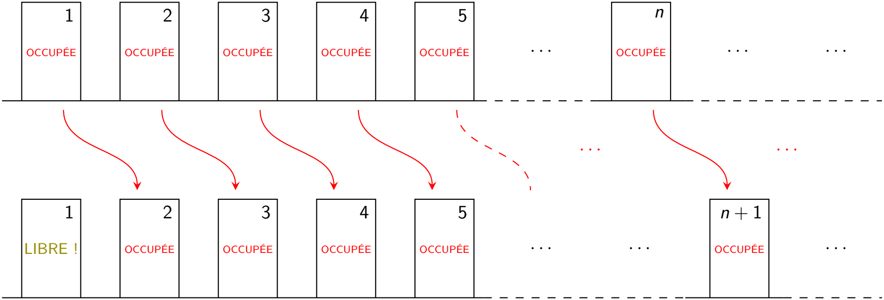
L'hôtel de HILBERT, épisode 1 : un client arrive

Une autre façon d'interpréter la conclusion précédente est la suivante, imaginée par le mathématicien allemand David HILBERT (1862–1943).



L'hôtel de HILBERT, épisode 1 : un client arrive

Une autre façon d'interpréter la conclusion précédente est la suivante, imaginée par le mathématicien allemand David HILBERT (1862–1943).



Plus généralement, si $n \geq 2$ clients arrivent (par exemple $n = 2020$) on applique n fois le processus.

Beaucoup de nombres réels

On considère maintenant $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Observation

$\mathbb{R}_+$ est strictement plus petit que $\mathbb{R}_+ \cup \{-1\}$.

Beaucoup de nombres réels

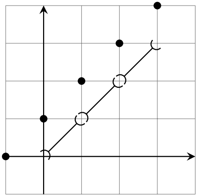
On considère maintenant $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Observation

$\mathbb{R}_+$ est strictement plus petit que $\mathbb{R}_+ \cup \{-1\}$.

On peut cependant encore montrer qu'il y a autant d'éléments dans $\mathbb{R}_+$ que dans $\mathbb{R}_+ \cup \{-1\}$ en considérant par exemple la fonction (non continue) $f : \mathbb{R}_+ \cup \{-1\} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \\ x, & \text{sinon.} \end{cases}$$



Beaucoup de nombres réels

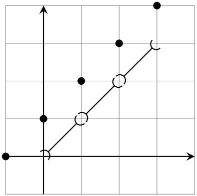
On considère maintenant $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Observation

$\mathbb{R}_+$ est strictement plus petit que $\mathbb{R}_+ \cup \{-1\}$.

On peut cependant encore montrer qu'il y a autant d'éléments dans $\mathbb{R}_+$ que dans $\mathbb{R}_+ \cup \{-1\}$ en considérant par exemple la fonction (non continue) $f : \mathbb{R}_+ \cup \{-1\} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, \\ x, & \text{sinon.} \end{cases}$$



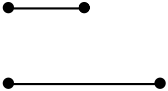
Plus généralement, si E est un ensemble infini et si $x \notin E$ alors E possède autant d'éléments que $E \cup \{x\}$. En particulier, les intervalles $[0, 1[$ et $[0, 1]$ ont autant d'éléments.

1. $\infty + 1$
2. Un seul infini continu (« avec des traits »)
3. Un seul infini dénombrable (« avec des points »)
4. Infini continu $>$ infini dénombrable

Intervalles de $\mathbb{R}$

Observation

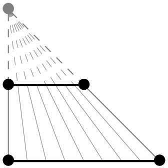
On dirait que $[0, 2]$ est « deux fois plus gros » que $[0, 1]$.



Intervalles de $\mathbb{R}$

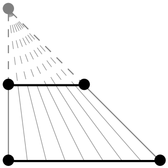
Observation

On dirait que $[0, 2]$ est « deux fois plus gros » que $[0, 1]$.



Observation

On dirait que $[0,2]$ est « deux fois plus gros » que $[0,1]$.



Conclusion

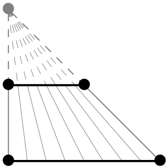
Il y autant de points dans $[0,2]$ *que dans* $[0,1]$ *(«* $\infty + \infty = \infty$ *»).*

On a utilisé la fonction

$$\left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,2] \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \right. .$$

Observation

On dirait que $[0,2]$ est « deux fois plus gros » que $[0,1]$.



Conclusion

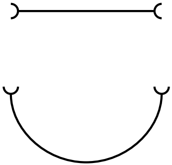
Il y autant de points dans $[0,2]$ *que dans* $[0,1]$ *(«* $\infty + \infty = \infty$ *»).*

On a utilisé la fonction

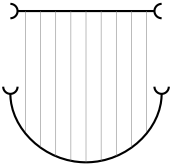
$$\left|\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,2] \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}\right. .$$

Plus généralement, deux intervalles (non vides et non réduits à un point) ont le même nombre de points.

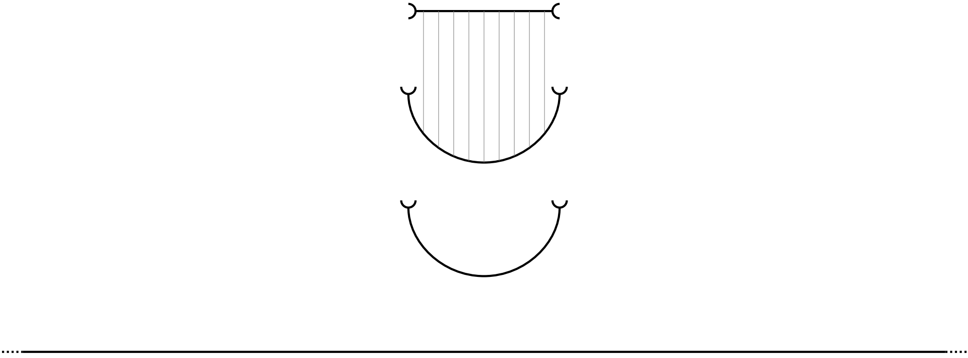
L'intervalle, l'arc de cercle et $\mathbb{R}$



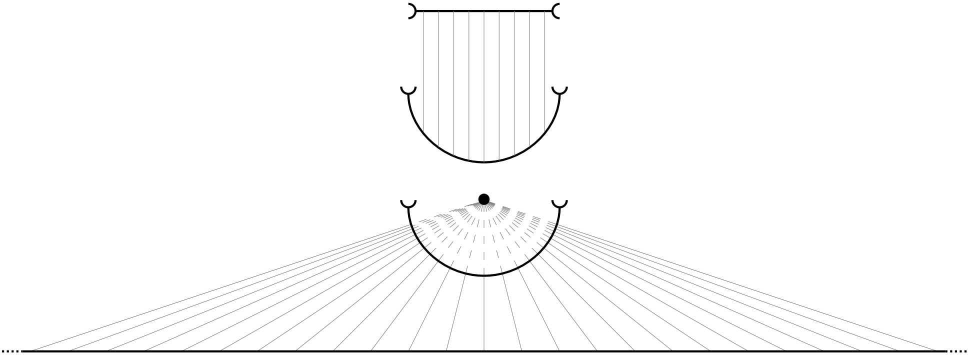
L'intervalle, l'arc de cercle et $\mathbb{R}$



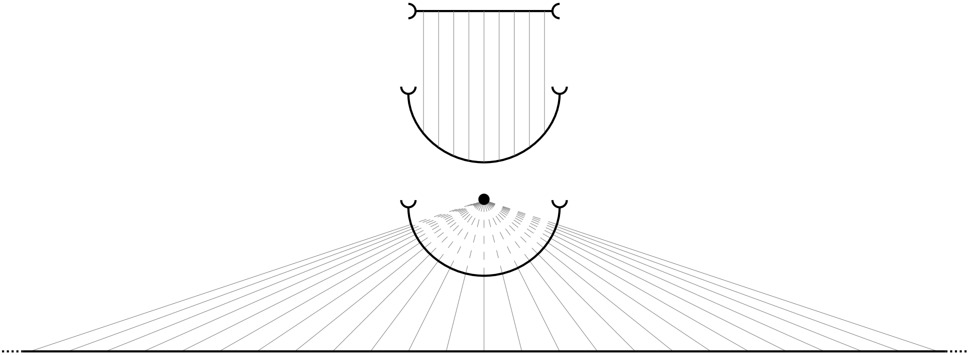
L'intervalle, l'arc de cercle et $\mathbb{R}$



L'intervalle, l'arc de cercle et $\mathbb{R}$



L'intervalle, l'arc de cercle et $\mathbb{R}$

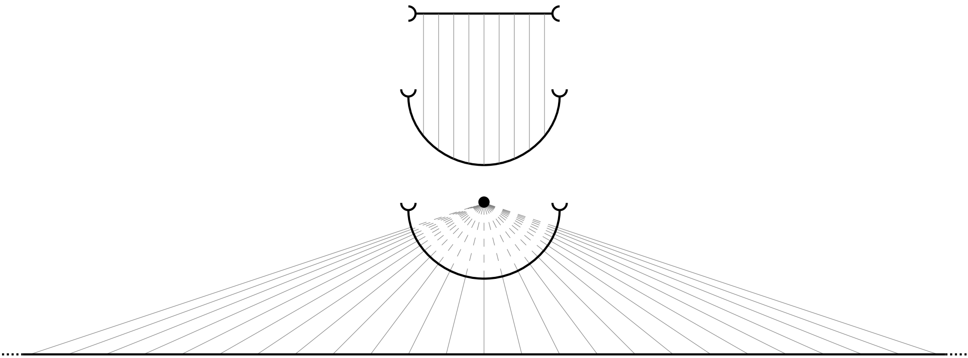


Conclusion

Il y a autant de points dans $]-1,1[$ *que dans* $\mathbb{R}$.

La fonction $]-1,1[\to \mathbb{R}$ qui en résulte est la fontion tangente.

L'intervalle, l'arc de cercle et $\mathbb{R}$



Conclusion

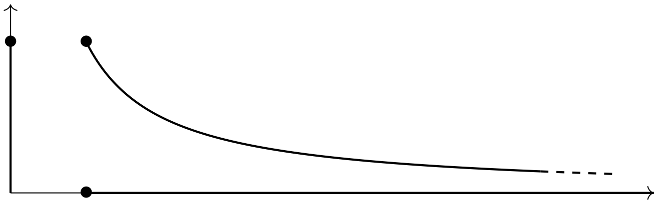
Il y a autant de points dans $]-1, 1[$ *que dans* $\mathbb{R}$.

La fonction $]-1, 1[\to \mathbb{R}$ qui en résulte est la fontion tangente. Plus généralement, tout intervalle (non vide et non réduit à un point) a le même nombre de points que $\mathbb{R}$.

Fonction inverse

Une autre façon de voir le résultat précédent est d'utiliser la fonction inverse :

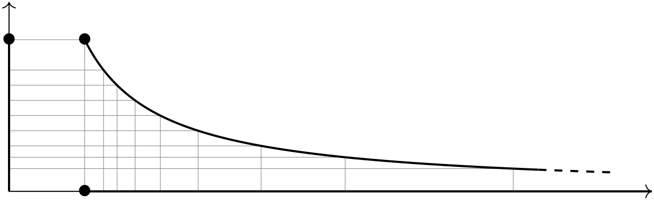
$$\left| \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. .$$



Fonction inverse

Une autre façon de voir le résultat précédent est d'utiliser la fonction inverse :

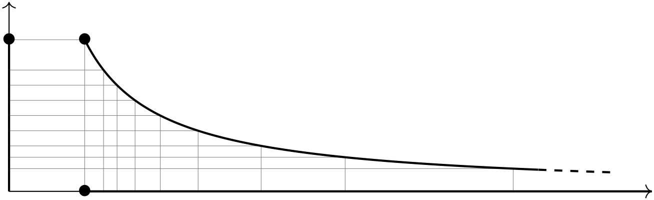
$$\left|\begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right. .$$



Fonction inverse

Une autre façon de voir le résultat précédent est d'utiliser la fonction inverse :

$$\left| \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. .$$



On obtient ici qu'il y a autant de points dans $]0,1]$ que dans $[1,+\infty[$.

Le segment et le carré

Observation

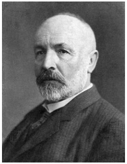
On dirait que le carré (plein) $[0,1]^2$ est « vraiment beaucoup plus gros » que le segment $[0,1]$.

Le segment et le carré

Observation

On dirait que le carré (plein) $[0,1]^2$ est « vraiment beaucoup plus gros » que le segment $[0,1]$.

Le mathématicien allemand Georg Cantor (1845–1918) a eu l'idée de séparer les décimales des éléments de $[0,1]$ pour obtenir un élément de $[0,1]^2$:



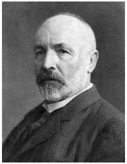
$$\left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1]^2 \\ 0.{\color{red}a_1}a_2{\color{red}a_3}a_4{\color{red}a_5}a_6\ldots & \longmapsto & (0.{\color{red}a_1}{\color{red}a_3}{\color{red}a_5}\ldots, 0.a_2a_4a_6\ldots) \end{array} \right. .$$

Par exemple 0.123456 est envoyé sur (0.135, 0.246), et 0.142536 est envoyé sur (0.123, 0.456).

Le segment et le carré

Observation

On dirait que le carré (plein) $[0,1]^2$ est « vraiment beaucoup plus gros » que le segment $[0,1]$.



Le mathématicien allemand Georg Cantor (1845–1918) a eu l'idée de séparer les décimales des éléments de $[0,1]$ pour obtenir un élément de $[0,1]^2$:

$$\left|\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1]^2 \\ 0.{\color{red}a_1}a_2{\color{red}a_3}a_4{\color{red}a_5}a_6\ldots & \longmapsto & (0.{\color{red}a_1}{\color{red}a_3}{\color{red}a_5}\ldots,0.a_2a_4a_6\ldots) \end{array}\right. .$$

Par exemple $0.{\color{red}1}2{\color{red}3}4{\color{red}5}6$ est envoyé sur $(0.{\color{red}135},0.246)$, et $0.{\color{red}1}4{\color{red}2}5{\color{red}3}6$ est envoyé sur $(0.{\color{red}123},0.456)$.

Conclusion

Il y a autant de points dans $[0,1]^2$ *que dans* $[0,1]$.

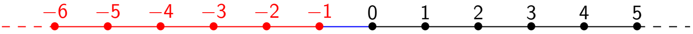
1. $\infty + 1$
2. Un seul infini continu (« avec des traits »)
3. Un seul infini dénombrable (« avec des points »)
4. Infini continu $>$ infini dénombrable

Nombres entiers relatifs

Observation

On dirait que $\mathbb{Z}$ est « deux fois plus gros » que $\mathbb{N}$.

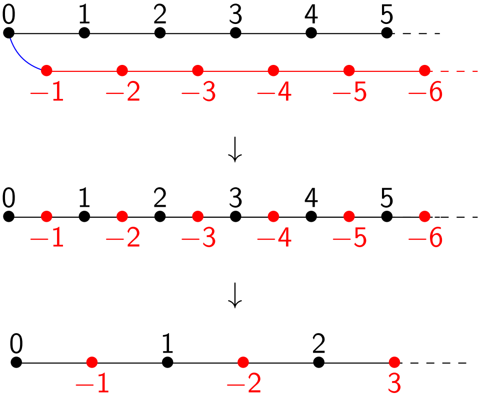
Nombres entiers relatifs



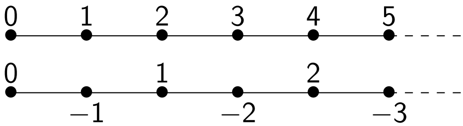
Observation

On dirait que $\mathbb{Z}$ est « deux fois plus gros » que $\mathbb{N}$.

Et pourtant :



Nombres entiers relatifs



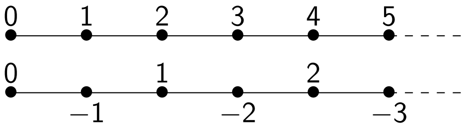
Conclusion

Il y a autant d'éléments dans $\mathbb{Z}$ que dans $\mathbb{N}$ (« $\infty + \infty = \infty$ »).

On a utilisé la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{si } n \geq 0, \\ -2n - 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nombres entiers relatifs



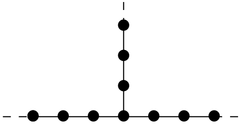
Conclusion

Il y a autant d'éléments dans $\mathbb{Z}$ que dans $\mathbb{N}$ (« $\infty + \infty = \infty$ »).

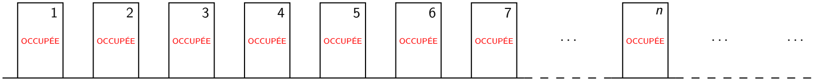
On a utilisé la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{si } n \geq 0, \\ -2n - 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

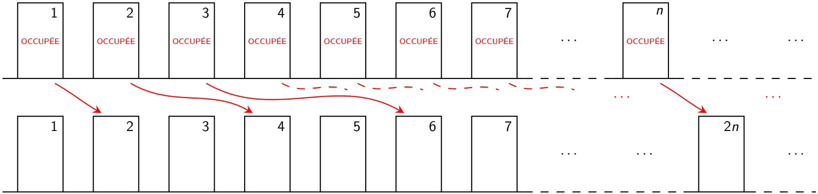
On peut de même montrer qu'il y a autant d'éléments dans trois, quatre, cinq, ..., copies de $\mathbb{N}$, que dans $\mathbb{N}$.



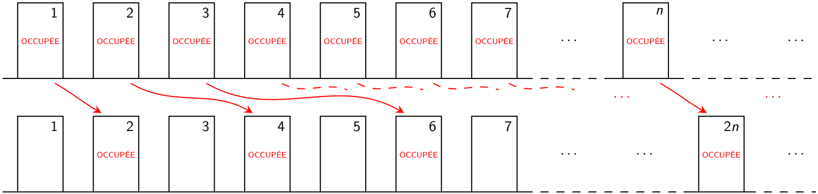
L'hôtel de Hilbert, épisode 2 : un car infini



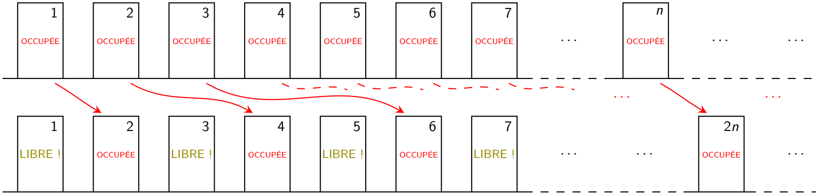
L'hôtel de HILBERT, épisode 2 : un car infini



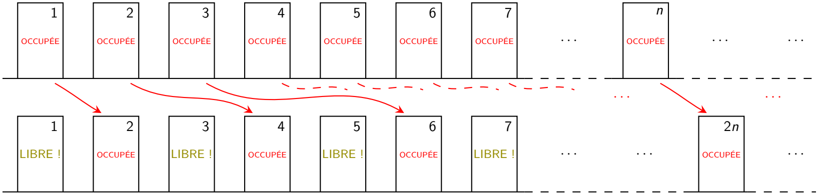
L'hôtel de Hilbert, épisode 2 : un car infini



L'hôtel de HILBERT, épisode 2 : un car infini



L'hôtel de HILBERT, épisode 2 : un car infini

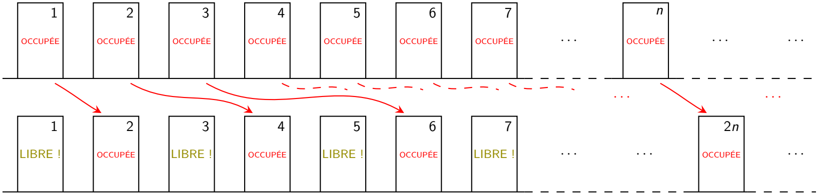


On suppose maintenant que **deux** cars infinis arrivent. Le réceptionniste désire donner la clé en main propre à chaque client.

Problème

Si le réceptionniste donne d'abord les clés aux clients du premier car (infini !), ceux du deuxième car ne les auront jamais.

L'hôtel de Hilbert, épisode 2 : un car infini



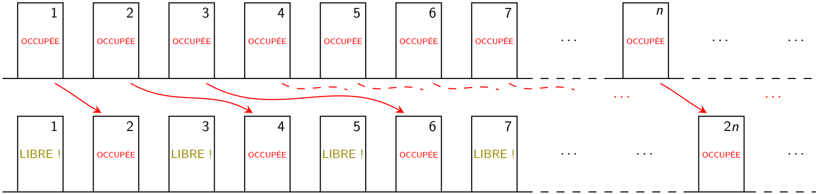
On suppose maintenant que **deux** cars infinis arrivent. Le réceptionniste désire donner la clé en main propre à chaque client.

Problème

Si le réceptionniste donne d'abord les clés aux clients du premier car (infini !), ceux du deuxième car ne les auront jamais.

Il suffit de d'abord « fusionner » les deux cars infinis en un seul, comme on l'a fait pour $\mathbb{Z}$ ($=$ deux copies de $\mathbb{N}$) et $\mathbb{N}$.

L'hôtel de Hilbert, épisode 2 : un car infini



On suppose maintenant que **deux** cars infinis arrivent. Le réceptionniste désire donner la clé en main propre à chaque client.

Problème

Si le réceptionniste donne d'abord les clés aux clients du premier car (infini !), ceux du deuxième car ne les auront jamais.

Il suffit de d'abord « fusionner » les deux cars infinis en un seul, comme on l'a fait pour $\mathbb{Z}$ (= deux copies de $\mathbb{N}$) et $\mathbb{N}$. En d'autres termes, le réceptionniste alterne entre les deux cars.

Nombres rationnels

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

Nombres rationnels

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1re copie	0	1	2	3	$\cdots$
2e copie	0	1	2	3	$\cdots$
3e copie	0	1	2	3	$\cdots$
4e copie	0	1	2	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1re copie	0 0	1	2	3	$\cdots$
2e copie	0	1	2	3	$\cdots$
3e copie	0	1	2	3	$\cdots$
4e copie	0	1	2	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1re copie	0 0	1 2	2	3	$\cdots$
2e copie	0 1	1	2	3	$\cdots$
3e copie	0	1	2	3	$\cdots$
4e copie	0	1	2	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

Nombres rationnels

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1re copie	${}^{0}0$	${}^{1}2$	${}^{2}5$	3	$\cdots$
2e copie	${}^{0}1$	${}^{1}4$	2	3	$\cdots$
3e copie	${}^{0}3$	1	2	3	$\cdots$
4e copie	0	1	2	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

Nombres rationnels

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1re copie	$^0 0$	$^1 2$	$^2 5$	$^3 9$	$\cdots$
2e copie	$^0 1$	$^1 4$	$^2 8$	^{3}	$\cdots$
3e copie	$^0 3$	$^1 7$	^{2}	^{3}	$\cdots$
4e copie	$^0 6$	^{1}	^{2}	^{3}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1re copie	${}^0 0$	${}^1 2$	${}^2 5$	${}^3 9$	$\cdots$
2e copie	${}^0 1$	${}^1 4$	${}^2 8$	${}^3 13$	$\cdots$
3e copie	${}^0 3$	${}^1 7$	${}^2 12$	^{3}	$\cdots$
4e copie	${}^0 6$	${}^1 11$	^{2}	^{3}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1^{re} copie	$^0 0$	$^1 2$	$^2 5$	$^3 9$	$\cdots$
2^e copie	$^0 1$	$^1 4$	$^2 8$	$^3 13$	$\cdots$
3^e copie	$^0 3$	$^1 7$	$^2 12$	$^3 18$	$\cdots$
4^e copie	$^0 6$	$^1 11$	$^2 17$	^{3}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1re copie	${}^0 0$	${}^1 2$	${}^2 5$	${}^3 9$	$\cdots$
2e copie	${}^0 1$	${}^1 4$	${}^2 8$	${}^3 13$	$\cdots$
3e copie	${}^0 3$	${}^1 7$	${}^2 12$	${}^3 18$	$\cdots$
4e copie	${}^0 6$	${}^1 11$	${}^2 17$	${}^3 24$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

Nombres rationnels

On regarde l'ensemble des nombres rationnels (positifs). C'est l'ensemble des réels de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
3	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ensemble $\mathbb{Q}_+^*$

1^{re} copie	$^0 0$	$^1 2$	$^2 5$	$^3 9$	$\cdots$
2^e copie	$^0 1$	$^1 4$	$^2 8$	$^3 13$	$\cdots$
3^e copie	$^0 3$	$^1 7$	$^2 12$	$^3 18$	$\cdots$
4^e copie	$^0 6$	$^1 11$	$^2 17$	$^3 24$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

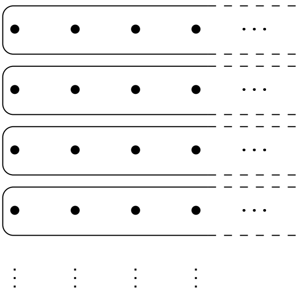
« Infinité » de copies de $\mathbb{N}$

Conclusion

Il y a autant d'éléments dans $\mathbb{Q}$ que dans $\mathbb{N}$.

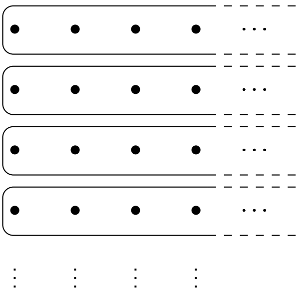
L'hôtel de Hilbert, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent. . .
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

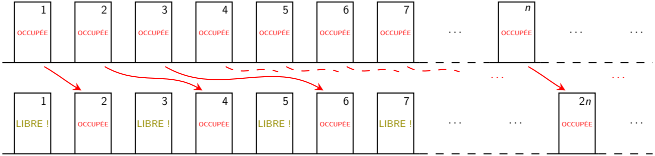


L'hôtel de HILBERT, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent...
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

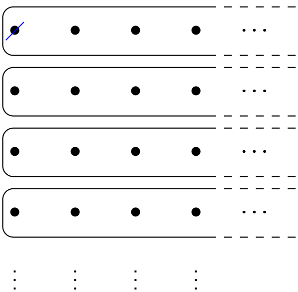


Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.

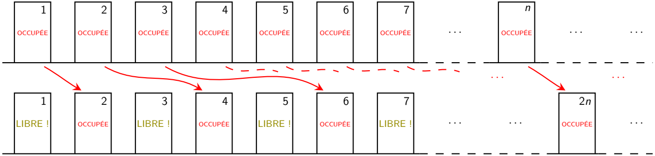


L'hôtel de HILBERT, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent...
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

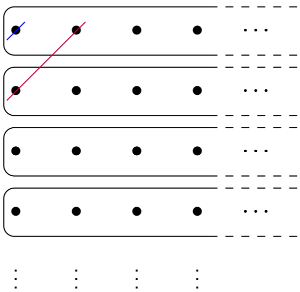


Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.

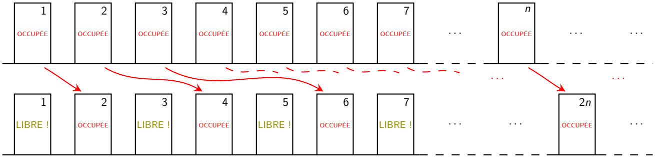


L'hôtel de Hilbert, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent...
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

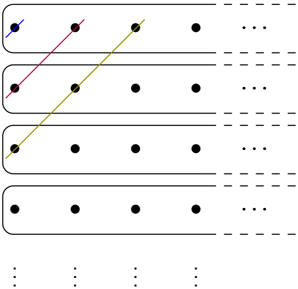


Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.

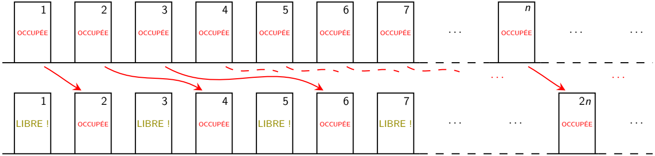


L'hôtel de HILBERT, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent...
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

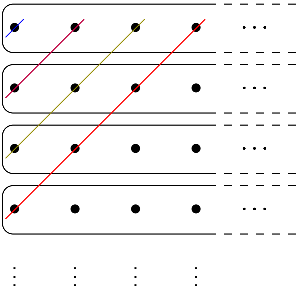


Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.

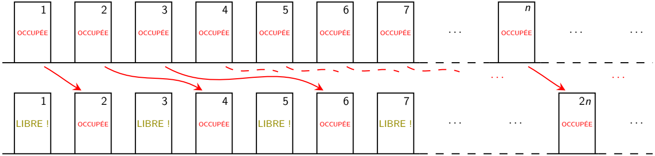


L'hôtel de HILBERT, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent...
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

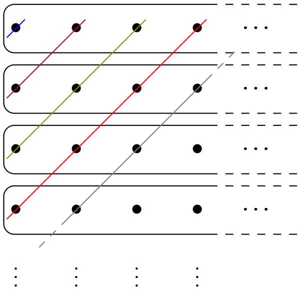


Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.

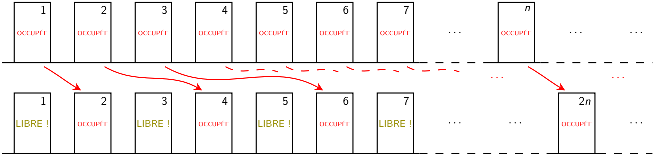


L'hôtel de HILBERT, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent...
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

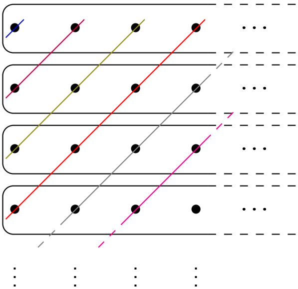


Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.

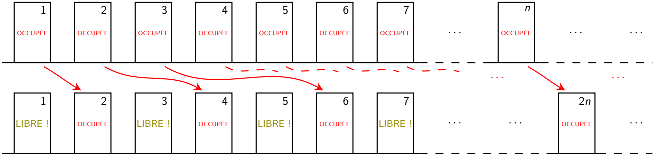


L'hôtel de HILBERT, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent...
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?

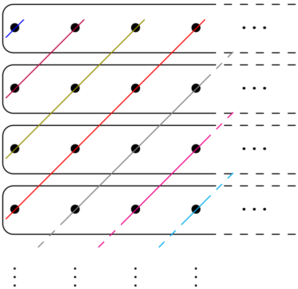


Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.

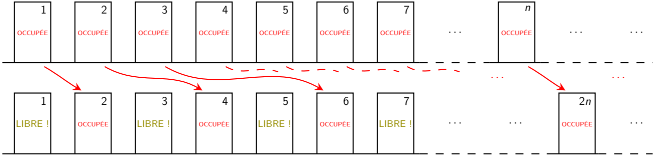


L'hôtel de HILBERT, épisode 3 : une infinité de cars infinis

On suppose maintenant qu'une **infinité** de cars infinis arrivent…
Comment peut faire le réceptionniste pour tous les loger, sachant qu'il désire encore donner la clé en main propre à chaque client ?



Comme avant, on commence par libérer une chambre sur deux.



1. $\infty + 1$
2. Un seul infini continu (« avec des traits »)
3. Un seul infini dénombrable (« avec des points »)
4. Infini continu $>$ infini dénombrable

Des infinis plus grands que les autres

Jusqu'à maintenant, on a vu que

$$\mathbb{R}, [0,1], [0,1]^2,$$

ont le même nombre d'éléments, de même

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q},$$

ont le même nombre d'éléments.

Question

Le segment $[0,1]$ possède-t-il le même nombre d'éléments que $\mathbb{N}$?

Des infinis plus grands que les autres

Jusqu'à maintenant, on a vu que

$$\mathbb{R}, [0,1], [0,1]^2,$$

ont le même nombre d'éléments, de même

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q},$$

ont le même nombre d'éléments.

Question

Le segment $[0,1]$ possède-t-il le même nombre d'éléments que $\mathbb{N}$?

Cantor, encore lui, a pu démontrer que **non**. Il a utilisé ce que l'on appelle maintenant l'**argument diagonal** ou **extraction diagonale** de Cantor.

Beaucoup plus de réels que d'entiers (« $\infty > \infty$ »)

On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose que $[0, 1]$ possède autant d'éléments que $\mathbb{N}$.

0	0,	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\ldots$
1	0,	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\ldots$
2	0,	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\ldots$
3	0,	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$\ldots$
4	0,	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$\ldots$
5	0,	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0	$0,141592\ldots$
1	$0,202046\ldots$
2	$0,091084\ldots$
3	$0,530057\ldots$
4	$0,435344\ldots$
5	$0,046012\ldots$
$\vdots$	

Beaucoup plus de réels que d'entiers (« $\infty > \infty$ »)

On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose que $[0,1]$ possède autant d'éléments que $\mathbb{N}$.

0	0,	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\ldots$
1	0,	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\ldots$
2	0,	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\ldots$
3	0,	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$\ldots$
4	0,	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$\ldots$
5	0,	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0	$0,141592\ldots$
1	$0,202046\ldots$
2	$0,091084\ldots$
3	$0,530057\ldots$
4	$0,435344\ldots$
5	$0,046012\ldots$
$\vdots$	

- On choisit une décimale $a \in \{0,\ldots,9\}$ différente de a_1, puis $b \in \{0,\ldots,9\}$ différente de b_2, puis $c \in \{0,\ldots,9\}$ différente de c_3, etc.

Beaucoup plus de réels que d'entiers (« $\infty > \infty$ »)

On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose que $[0,1]$ possède autant d'éléments que $\mathbb{N}$.

0	0,	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\ldots$
1	0,	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\ldots$
2	0,	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\ldots$
3	0,	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$\ldots$
4	0,	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$\ldots$
5	0,	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0	$0,141592\ldots$
1	$0,202046\ldots$
2	$0,091084\ldots$
3	$0,530057\ldots$
4	$0,435344\ldots$
5	$0,046012\ldots$
$\vdots$	

- On choisit une décimale $a \in \{0,\ldots,9\}$ différente de a_1, puis $b \in \{0,\ldots,9\}$ différente de b_2, puis $c \in \{0,\ldots,9\}$ différente de c_3, etc.
- Le réel $0,abcdef\ldots$ ne peut pas être dans la liste ci-dessus !

Beaucoup plus de réels que d'entiers (« $\infty > \infty$ »)

On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose que $[0, 1]$ possède autant d'éléments que $\mathbb{N}$.

0	0,	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\ldots$
1	0,	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\ldots$
2	0,	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\ldots$
3	0,	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$\ldots$
4	0,	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$\ldots$
5	0,	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0	$0,141592\ldots$
1	$0,202046\ldots$
2	$0,091084\ldots$
3	$0,530057\ldots$
4	$0,435344\ldots$
5	$0,046012\ldots$
$\vdots$	

- On choisit une décimale $a \in \{0, \ldots, 9\}$ différente de a_1, puis $b \in \{0, \ldots, 9\}$ différente de b_2, puis $c \in \{0, \ldots, 9\}$ différente de c_3, etc.
- Le réel $0, abcdef \ldots$ ne peut pas être dans la liste ci-dessus !
- L'hypothèse initiale est donc fausse, par conséquent :

Beaucoup plus de réels que d'entiers (« $\infty > \infty$ »)

On fait un raisonnement par l'absurde. On suppose que $[0,1]$ possède autant d'éléments que $\mathbb{N}$.

0	0,	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\dots$
1	0,	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\dots$
2	0,	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$\dots$
3	0,	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$\dots$
4	0,	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$\dots$
5	0,	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0	$0,141592\dots$
1	$0,202046\dots$
2	$0,091084\dots$
3	$0,530057\dots$
4	$0,435344\dots$
5	$0,046012\dots$
$\vdots$	

- On choisit une décimale $a \in \{0,\dots,9\}$ différente de a_1, puis $b \in \{0,\dots,9\}$ différente de b_2, puis $c \in \{0,\dots,9\}$ différente de c_3, etc.
- Le réel $0,abcdef\dots$ ne peut pas être dans la liste ci-dessus !
- L'hypothèse initiale est donc fausse, par conséquent :

Théorème

Le segment $[0,1]$ possède strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$.

Entre entiers et réels

Parmis tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ rencontrés jusqu'à présent :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, [0,1],]-1,1[, [0,2], \mathbb{R},$$

tous avaient soit le même nombre d'éléments que $\mathbb{N}$ soit le même nombre d'éléments que $\mathbb{R}$.

Entre entiers et réels

Parmis tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ rencontrés jusqu'à présent :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, [0,1],]-1,1[, [0,2], \mathbb{R},$$

tous avaient soit le même nombre d'éléments que $\mathbb{N}$ soit le même nombre d'éléments que $\mathbb{R}$.

Question

Est-il possible de trouver un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contienne strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$ mais en même temps strictement moins d'éléments que $\mathbb{R}$?

Entre entiers et réels

Parmis tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ rencontrés jusqu'à présent :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, [0,1],]{-1}, 1[, [0,2], \mathbb{R},$$

tous avaient soit le même nombre d'éléments que $\mathbb{N}$ soit le même nombre d'éléments que $\mathbb{R}$.

Question

Est-il possible de trouver un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contienne strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$ mais en même temps strictement moins d'éléments que $\mathbb{R}$?

CANTOR pensait que non : c'est ce qu'on appele l'**hypothèse du continu**.

Hypothèse du continu

Hypothèse du continu (Cantor)

Il n'existe pas de sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contienne strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$ mais en même temps strictement moins d'éléments que $\mathbb{R}$.

L'hypothèse du continu est-elle vraie, comme le pansait Cantor, ou fausse ?

Hypothèse du continu

Hypothèse du continu (Cantor)

Il n'existe pas de sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contienne strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$ mais en même temps strictement moins d'éléments que $\mathbb{R}$.

L'hypothèse du continu est-elle vraie, comme le pansait Cantor, ou fausse ?

- Le mathématicien austro-américain Kurt Gödel (1906–1978) a montré qu'il est impossible de montrer que l'hypothèse du continu est fausse.

Hypothèse du continu

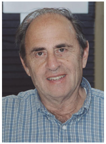
Hypothèse du continu (Cantor)

Il n'existe pas de sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contienne strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$ mais en même temps strictement moins d'éléments que $\mathbb{R}$.

L'hypothèse du continu est-elle vraie, comme le pansait Cantor, ou fausse ?

- Le mathématicien austro-américain Kurt Gödel (1906–1978) a montré qu'il est impossible de montrer que l'hypothèse du continu est fausse.

- Le mathématicien américain Paul Cohen (1934–2007) a montré qu'il est impossible de montrer que l'hypothèse du continu est vraie.



Hypothèse du continu

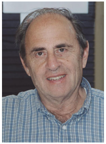
Hypothèse du continu (Cantor)

Il n'existe pas de sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contienne strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$ mais en même temps strictement moins d'éléments que $\mathbb{R}$.

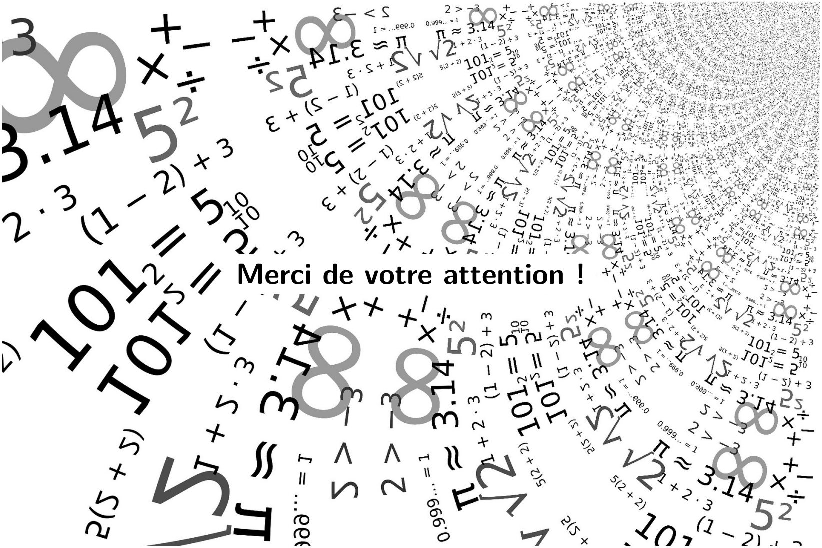
L'hypothèse du continu est-elle vraie, comme le pansait Cantor, ou fausse ?

- Le mathématicien austro-américain Kurt Gödel (1906–1978) a montré qu'il est impossible de montrer que l'hypothèse du continu est fausse.

- Le mathématicien américain Paul Cohen (1934–2007) a montré qu'il est impossible de montrer que l'hypothèse du continu est vraie.



On dit que l'hypothèse du continu est **indécidable**.



Merci de votre attention !

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On a vu qu'il y a strictement plus de réels que de rationnels. En particulier, il y a beaucoup plus d'irrationnels que de rationnels !

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On a vu qu'il y a strictement plus de réels que de rationnels. En particulier, il y a beaucoup plus d'irrationnels que de rationnels !

C'est un fait un peu troublant quand on le compare au résultat suivant.

Proposition

Si $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ aussi proche de x que l'on veut.

On a vu qu'il y a strictement plus de réels que de rationnels. En particulier, il y a beaucoup plus d'irrationnels que de rationnels !

C'est un fait un peu troublant quand on le compare au résultat suivant.

Proposition

Si $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ aussi proche de x que l'on veut.

(Il suffit de regarder l'écriture décimale de x.)

Et après ?

On a vu que $\mathbb{R}$ possède strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$.

Question

Existe-t-il des ensembles avec strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$?

La réponse est oui, et résulte d'une construction tout à fait générale.

Et après ?

On a vu que $\mathbb{R}$ possède strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$.

Question

Existe-t-il des ensembles avec strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$?

La réponse est oui, et résulte d'une construction tout à fait générale.

Définition

Soit E un ensemble (par exemple $E = \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{R}$).

- Une **partie** de E est un sous-ensemble $F \subset E$.
- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Et après ?

On a vu que $\mathbb{R}$ possède strictement plus d'éléments que $\mathbb{N}$.

Question

Existe-t-il des ensembles avec strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$?

La réponse est oui, et résulte d'une construction tout à fait générale.

Définition

Soit E un ensemble (par exemple $E = \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{R}$).

- Une **partie** de E est un sous-ensemble $F \subset E$.
- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Par exemple, les sous-ensembles $\{0\}, \{\text{entiers pairs}\}$ et $\mathbb{N} \setminus \{3\}$ sont des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Encore CANTOR

Théorème (CANTOR)

Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E)$ possède strictement plus d'éléments que E.

Encore Cantor

Théorème (Cantor)

Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E)$ possède strictement plus d'éléments que E.

- Par exemple, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ possède le même nombre d'éléments que $[0,1]$ (via l'écriture binaire) et donc que $\mathbb{R}$.

Encore Cantor

Théorème (Cantor)

Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E)$ possède strictement plus d'éléments que E.

- Par exemple, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ possède le même nombre d'éléments que $[0,1]$ (via l'écriture binaire) et donc que $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ possède donc strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$!

Encore Cantor

Théorème (Cantor)

Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E)$ possède strictement plus d'éléments que E.

- Par exemple, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ possède le même nombre d'éléments que $[0,1]$ (via l'écriture binaire) et donc que $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ possède donc strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$!
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ possède donc strictement plus d'éléments que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Encore Cantor

Théorème (Cantor)

Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E)$ possède strictement plus d'éléments que E.

- Par exemple, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ possède le même nombre d'éléments que $[0,1]$ (via l'écriture binaire) et donc que $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ possède donc strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$!
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ possède donc strictement plus d'éléments que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
- $\ldots$

Encore CANTOR

Théorème (CANTOR)

Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{P}(E)$ possède strictement plus d'éléments que E.

- Par exemple, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ possède le même nombre d'éléments que $[0,1]$ (via l'écriture binaire) et donc que $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ possède donc strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$!
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ possède donc strictement plus d'éléments que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
- ...

On obtient donc toute une série d'infinis plus grands que les précédents.