Parties infinies au jeu de la bataille

Salim Rostam

Juin 2025
Journée académique des mathématiques (Orléans)

On considère la bataille à une couleur avec un nombre n pair de cartes, où chaque pli gagné est rangé selon la règle du max (on range d'abord la carte la plus grande puis la plus petite). Le but de cette note est de montrer le résultat suivant (voir aussi l'article *Cycles in War* de SPIVEY [1]).

Théorème. *Si n et $\frac{n}{3}$ ne sont pas des puissances de 2 (c'est-à-dire $n = m \cdot 2^k$ avec $m \geq 5$ impair) alors il existe des parties infinies pour la bataille à n cartes et une couleur.*

Remarque. Le résultat précédent n'est pas vide, car il existe évidemment des parties finies ! Pour $n = 2m$, il suffit de considérer par exemple la distribution initiale suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ m+1 & m+2 & \cdots & 2m \end{pmatrix}.$$

1 Parties infinies entre couleurs

On considère une suite de couleurs $\chi_0 < \chi_1 < \dots$ (penser par exemple : si $\chi_0 =$ cœur et $\chi_1 =$ trèfle alors un trèfle sera toujours plus fort qu'un cœur). Étant donné $r, s \geq 1$ et deux suites finies $C = (c_1, \dots, c_r)$ et $D = (d_1, \dots, d_s)$ de couleurs, on considère le jeu donné par la procédure suivante :

- si $c_1 = d_1$ alors le jeu s'arrête et le match est nul ;
- si $c_1 < d_1$ alors :
  - si $r = 1$ le jeu s'arrête et D est déclaré vainqueur,
  - si $r > 1$ le jeu continue avec $C' = (c_2, \dots, c_r)$ et $D' = (d_1, \dots, d_s, d_1, c_1)$,
- si $c_1 > d_1$ alors on fait la même chose où C et D sont permutés, c'est-à-dire :
  - si $s = 1$ le jeu s'arrête et C est déclaré vainqueur,
  - si $s > 1$ le jeu continue avec $C' = (c_2, \dots, c_r, c_1, d_1)$ et $D' = (d_2, \dots, d_s)$.

L'idée est qu'on va construire des positions initiales C, D telles que le jeu ne s'arrêtera jamais. On va définir l'opération de successeur.

Définition. — Pour tout $n \geq 0$, on note $\chi_n^+ \coloneqq \chi_{n+1}$.

1. INTEGERS: ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORIAL NUMBER THEORY x (200x), # Axx

— Si $C = (c_1, \dots, c_r)$ est une suite de couleurs, on note $C^+ \coloneqq (c_1^+, \dots, c_r^+)$.

On va maintenant définir des suites particulières.

Définition. On pose $B_0 \coloneqq (\chi_0)$ et pour tout $k \geq 0$:

$$B_{k+1} \coloneqq B_k^+ \oplus B_k,$$

où $\oplus$ désigne la concaténation.

Exemple. — On a $B_0^+ = (\chi_1)$ donc $B_1 = (\chi_1) \oplus (\chi_0) = (\chi_1, \chi_0)$.

— On a $B_1^+ = (\chi_2, \chi_1)$ donc $B_2 = B_1^+ \oplus B_1 = (\chi_2, \chi_1) \oplus (\chi_1, \chi_0) = (\chi_2, \chi_1, \chi_1, \chi_0)$.

Remarque. On peut montrer par récurrence que la suite B_k est de longueur 2^k et ne contient que les couleurs $\chi_0, \dots, \chi_k$.

L'observation suivante est fondamentale pour la suite.

Proposition. *Soit $k \geq 0$. Si B_k et B_k^+ jouent l'un contre l'autre alors le tas B_k^+ va gagner, plus précisément à la fin il sera B_{k+1}.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $k \geq 0$. Pour $k = 0$, si B_0 rencontre B_0^+ alors $\chi_1|\chi_2$ devient $\emptyset|(\chi_2, \chi_1) = \emptyset|B_1$ et c'est bien ce qu'on voulait.

Si maintenant le résultat est vrai pour $k - 1 \geq 0$, alors on a :

$$\begin{pmatrix} B_k \\ B_k^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{k-1}^+ & B_{k-1} \\ B_{k-1}^{++} & B_{k-1}^+ \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que le duel $B_{k-1}|B_{k-1}^+$ donne $\emptyset, B_k$. Puisque $\chi_i < \chi_j \iff \chi_i^+ < \chi_j^+$, on sait que le duel $B_{k-1}^+|B_{k-1}^{++}$ donne $\emptyset|B_k^+$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} B_k \\ B_k^+ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_{k-1}^+ & B_{k-1} \\ B_{k-1}^{++} & B_{k-1}^+ \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} B_{k-1} & \\ B_{k-1}^+ & B_k^+ \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} & \\ B_k^+ & B_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \\ B_{k+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

On en arrive maintenant au résultat principal.

Théorème. *Soit $k \geq 0$. On considère les positions suivantes :*

$$J \coloneqq \begin{pmatrix} B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & \\ B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix},$$

$$J' \coloneqq \begin{pmatrix} B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k & \\ B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix},$$

où J, J' ont au moins un bloc B_k^+ en haut[2]*. Le jeu partant de J (resp. J') est périodique, plus précisément, après 2^{k+1} étapes la position J (resp. J') réapparait.*

Démonstration. D'après la Proposition, on a, en indiquant la différence avec le nombre de blocs dans J :

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & \\ B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix} & \qquad & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k \\ B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k & \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & \\ B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= J.
\end{aligned}$$

Chaque flèche représente 2^k étapes donc on obtient bien le résultat annoncé.

De même, si le jeu part de J' on obtient :

$$\begin{aligned}
J' &= \begin{pmatrix} B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k & \\ B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix} & \qquad & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k & & \\ B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k & \\ B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= J',
\end{aligned}$$

comme annoncé. □

Corollaire. *Soit $k \geq 1$. On considère les positions suivantes :*

$$\begin{aligned}
K &:= \begin{pmatrix} B_{k-1} & B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k \\ B_{k-1}^+ & B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ \end{pmatrix}, \\
K' &:= \begin{pmatrix} B_{k-1} & B_k & B_k^+ & \cdots & B_k & B_k^+ & B_k \\ B_{k-1}^+ & B_k^+ & B_k & \cdots & B_k^+ & B_k & B_k^+ \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où K, K' ont au moins un bloc B_k^+ en haut. Le jeu partant de K (resp. K') ne se termine jamais.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème précédent, en remarquant que, d'après la Proposition, la position K (resp. K') donne la position J (resp. J') après 2^{k-1} étapes. □

2 Parties infinies pour la bataille

On veut maintenant revenir au jeu de la bataille. Pour cela, il nous faut un moyen pour associer une suite de couleurs à une suite de cartes. Pour cela, on répartit les entiers

2. On peut remarquer que la ligne du haut de J (resp. la ligne du bas de J') est une succession de B_{k+1}.

$1, \ldots, n$ en couleurs de la façon suivante :

$$\underbrace{\overset{1}{\bullet} \cdots \bullet}_{\chi_0} \underbrace{\bullet\bullet \cdots \bullet}_{\chi_1} \cdots \underbrace{\bullet \cdots \bullet \overset{n}{\bullet}}_{\chi_r} \tag{$\dagger$}$$

En d'autres termes, pour $r \geq 1$ on voit les couleurs $\chi_0, \ldots, \chi_r$ comme des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ satisfaisant :

$$\text{pour tous } i < i' \text{ et pour tous } c \in \chi_i \text{ et } c' \in \chi_{i'} \text{ on a } c < c.$$

Définition. Si $C = (c_1, \ldots, c_n)$ est une suite finie d'entiers strictement positifs, on note $\chi(C) = (i_1, \ldots, i_n)$ la suite finie d'entiers naturels telle que $c_j \in \chi_{i_j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemple. Prenons $r = 2$, $\chi_0 = \{1, 2, 3\}$, $\chi_1 = \{4, \ldots, 8\}$ et $\chi_2 = \{9, 10\}$. Pour $C = (2, 10, 5, 8, 3)$ on a $\chi(C) = (0, 2, 1, 1, 0)$ et pour $C' = (4, 7, 1, 9, 6)$ on a $\chi(C') = (1, 1, 0, 2, 1)$.

Proposition. *Soient C, C' deux suites finies d'entiers strictement positifs. Si le jeu entre $\chi(C)$ et $\chi(C')$ n'est pas nul, alors le déroulé de la partie est le même que pour la bataille entre C et C'. Plus précisément, les parties sont de même longueur (éventuellement infinie) et, à chaque étape, le gagnant du pli est le même.*

Démonstration. Découle du fait que si $c \in \chi_i$ et $c' \in \chi_{i'}$ alors si $i < i'$ on a $c < c'$ par définition de χ_i et $\chi_{i'}$. Ainsi, les plis dans le jeu entre $\chi(C)$ et $\chi(C')$ correspondent à des plis dans la bataille entre C et C' avec le même gagnant. $\square$

Exemple. Avec les C, C' de l'exemple précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 & 3 & & \\ 7 & 1 & 9 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 1 & 9 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 8 & 3 & 10 & 7 & 5 & 1 \\ 9 & 6 & 4 & 2 & & \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \\
&\to \cdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \chi(C) \\ \chi(C') \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & & \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \cdots
\end{aligned}$$

On en vient maintenant au résultat initial.

Théorème. *Soit n pair tel que ni n ni $\frac{n}{3}$ ne sont des puissances de 2. Alors il existe des parties infinies pour la bataille à une couleur et n cartes.*

Démonstration. D'après la Proposition précédente, il suffit de trouver des suites finies C, C' de cartes, correspondant à une répartition des éléments de $\{1, \ldots, n\}$, telles que $\chi(C, C') \coloneqq \begin{pmatrix} \chi(C) \\ \chi(C') \end{pmatrix}$ soit de la forme K ou K' comme dans le Corollaire.

Commençons d'abord par déterminer le nombre de cartes dans les positions K et K'. On rappelle que ces positions sont définies pour un entier $k \geq 1$.

— La position K possède une colonne de taille 2^{k-1} (colonne avec B_{k-1}) et $2p \geq 2$ colonnes de tailles 2^k (colonnes avec B_k) donc un total de $2^k + 2p2^{k+1} = (4p+1)2^k$ cartes. Remarquons que $p \geq 1$ puisque K possède au moins un bloc B_k^+ en haut.

— La position K' possède une colonne de taille 2^{k-1} et $2p+1 \geq 3$ colonnes de tailles 2^k donc un total de $2^k + (2p+1)2^{k+1} = (4p+3)2^k$ cartes. Remarquons que $p \geq 1$ puisque K' possède au moins un bloc B_k^+ en haut.

Ainsi, il est naturel de choisir k tel que $n = m2^k$ où m est impair. Par hypothèse, on a même $m \geq 5$.

— On suppose $m \equiv 1 \pmod 4$, c'est-à-dire $m = 4p+1$ avec $p \geq 1$. Le calcul précédent suggère de trouver C, C' telles que $\chi(C, C') = K$, où K est construit avec $2p = \frac{m-1}{2} \geq 2$ colonnes de tailles 2^k. Pour garantir que l'on peut trouver de tels C, C', pour chaque $i \in \{0, \dots, k+1\}$ soit λ_i le nombre d'occurrences de χ_i dans K. On pose alors $\chi(0) \coloneqq \{1, \dots, \lambda_0\}$ et pour $i \in \{1, \dots, k+1\}$:

$$\chi_i \coloneqq \{\lambda_0 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1, \dots, \lambda_0 + \cdots + \lambda_i\}.$$

Ces ensembles $\chi_0, \dots, \chi_{k+1}$ vérifient bien l'hypothèse (†) initiale, et si maintenant on construit C, C' en répartissant les éléments de $\{1, \dots, n\} = \chi_0 \sqcup \cdots \sqcup \chi_{k+1}$ selon K alors par construction on a bien $\chi(C, C') = K$ et c'est gagné !

— On suppose $m \equiv 3 \pmod 4$, c'est-à-dire $m = 4p+3$ avec $p \geq 1$; il n'y a pas d'autre cas puisque m est impair. Comme avant, on peut construire C, C' telles que $\chi(C, C')$ soit cette fois K', où K' est construit avec $2p = \frac{m-3}{2} \geq 2$ colonnes de taille 2^k.

□

Exemple. Construisons une partie infinie pour la bataille à 10 cartes. On a $10 = 5 \cdot 2$ donc l'hypothèse sur n est bien vérifiée (c'est le plus petit n qui vérifie l'hypothèse). On a $k = 1$ et $m = 5 \equiv 1 \pmod 4$ donc on cherche à construire une position initiale de forme K pour $k = 1$ avec $\frac{m-1}{2} = 2$ blocs de taille 2^k en haut. On a alors :

$$K = \begin{pmatrix} B_0 & B_1^+ & B_1 \\ B_0^+ & B_1 & B_1^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_0 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_1 & \chi_0 \\ \chi_1 & \chi_1 & \chi_0 & \chi_2 & \chi_1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $\chi_0 = \{1, 2, 3\}$ (3 éléments), $\chi_1 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ (5 éléments) et $\chi_2 = \{9, 10\}$ (2 éléments) et on peut donc par exemple prendre :

$$\begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

(on retrouve l'exemple précédent).

Exemple. Construisons une partie infinie pour la bataille à 72 cartes. On a $72 = 9 \cdot 2^3$ donc l'hypothèse sur n est bien vérifiée. On a $k = 3$ et $m = 9 \equiv 1 \pmod 4$ donc on cherche à construire une position initiale de forme K pour $k = 3$ avec $\frac{m-1}{2} = 4$ deux blocs de taille 2^k en haut. On a alors :

$$K = \begin{pmatrix} B_2 & B_3^+ & B_3 & B_3^+ & B_3 \\ B_2^+ & B_3 & B_3^+ & B_3 & B_3^+ \end{pmatrix}.$$

On a vu que $B_2 = (\chi_2, \chi_1, \chi_1, \chi_0)$, on a donc $B_2^+ = (\chi_3, \chi_2, \chi_2, \chi_1)$ et :

$$B_3 = B_2^+ \oplus B_2 = (\chi_3, \chi_2, \chi_2, \chi_1, \chi_2, \chi_1, \chi_1, \chi_0).$$

Voici alors le tableaux des occurrences (on vérifie que la somme sur les lignes donne bien la longueur 2^k pour B_k et B_k^+) :

	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
B_2	1	2	1		
B_2^+		1	2	1	
B_3	1	3	3	1	
B_3^+		1	3	3	1
K	5	19	27	17	4

La dernière ligne est obtenue en comptant les occurrences de chaque bloc dans K : les blocs B_2 et B_2^+ apparaissent une seule fois chacun et les blocs B_3 et B_3^+ apparaissent quatre fois chacun. La somme vaut bien $n = 72$ et les ensembles $\chi_0, \dots, \chi_4$ sont :

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= \{1, \dots, 5\}, \\
\chi_1 &= \{6, \dots, 5 + 19\} \\
&= \{6, \dots, 24\}, \\
\chi_2 &= \{25, \dots, 24 + 27\} \\
&= \{25, \dots, 51\}, \\
\chi_3 &= \{52, \dots, 51 + 17\} \\
&= \{52, \dots, 68\}, \\
\chi_4 &= \{69, \dots, 68 + 4\} \\
&= \{69, \dots, 72\}.
\end{aligned}$$

D'après les expressions précédentes on a (en bleu les blocs B_2^+ et B_3^+) :

$$K = \begin{pmatrix} \chi_2 & \chi_1 & \chi_1 & \chi_0 & \chi_4 & \chi_3 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \cdots \\ \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_1 & \chi_0 & \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} \cdots & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_1 & \chi_0 & \chi_4 & \chi_3 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \cdots \\ & \chi_4 & \chi_3 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_1 & \chi_0 & \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \cdots & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_1 & \chi_0 \\ & \chi_4 & \chi_3 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_2 & \chi_2 & \chi_1 \end{matrix} \right).$$

On peut alors placer les éléments de $\chi_0, \dots, \chi_4$ comme il se doit, par exemple en construisant d'abord C et en mettant les éléments des χ_i dans l'ordre croissant :

$$\begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 25 & 6 & 7 & 1 & 69 & 52 & 53 & 26 & 54 & 27 & 28 & 8 & \cdots \\ 60 & 38 & 39 & 16 & 61 & 40 & 41 & 17 & 42 & 18 & 19 & 4 & \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \cdots & 55 & 29 & 30 & 9 & 31 & 10 & 11 & 2 & 70 & 56 & 57 & 32 & 58 & 33 & 34 & 12 & \cdots \\ & 71 & 62 & 63 & 43 & 64 & 44 & 45 & 20 & 65 & 46 & 47 & 21 & 48 & 22 & 23 & 5 & \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \cdots & 59 & 35 & 36 & 13 & 37 & 14 & 15 & 3 \\ & 72 & 66 & 67 & 49 & 68 & 50 & 51 & 24 \end{matrix} \right).$$