Invariants de similitude - TD

Salim Rostam
Complément d'algèbre pour l'agrégation, ENS Rennes

Dans tout le TD on considère un corps K.

Exercice 1 (Traces, FGN algèbre 2 exo 2.28 p. 111)**.**

1. Comment savoir si deux matrices diagonalisables sont semblables ?
2. Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Montrer que si A est nilpotente alors $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose maintenant que $\mathrm{char}(K) > n$.

3. Réciproquement, montrer que si $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ alors A est nilpotente.
4. Trouver un contre-exemple à la question précédente si $\mathrm{char}(K) \leq n$.
5. Plus généralement, soient $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ si et seulement si $\chi_A = \chi_B$. En déduire que si A et B sont diagonalisables alors A et B sont semblables si et seulement si $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 2 (Matrices compagnon)**.** Soit $P \in K[X]$ unitaire non constant.

1. Montrer que $\chi_{\mathrm{C}_P} = P$.
2. Soit n le degré de P. Monter que $\pi_{\mathrm{C}_P} = P$, en considérant la famille $(I, \mathrm{C}_P, \dots, \mathrm{C}_P^{n-1})$.

Exercice 3 (BMP Lemme 6.87 p. 294)**.** Montrer le Lemme 2.3 : si $P \in K[X]$ est unitaire non constant alors le polynôme minimal de μ_X, la multiplication par X dans $K[X]/(P)$, est P.

Exercice 4 (Nombre d'invariants de similitude, BMP Remarque 6.85 p. 294)**.** Soit $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ d'invariants de similitude $P_1, \dots, P_s$. Montrer que $s = n$ si et seulement si M est une homothétie.

Exercice 5 (Petites dimensions, BMP Application 6.101 p. 300 et Exemple 6.95 p 298)**.**

1. Montrer que si $n \in \{2, 3\}$ alors $M, N \in \mathrm{Mat}_n(k)$ sont semblables si et seulement si $\chi_M = \chi_N$ et $\pi_M = \pi_N$.
2. Montrer que les matrices

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal mais ne sont pas semblables (si possible sans utiliser les théorèmes de réduction).

Exercice 6 (Encore des contre-exemples)**.**

1. (BMP Contre-exemple 6.98 p. 299.) Montrer que les matrices $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ sont semblables sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas semblable sur $\mathbb{Z}$ à sa transposée.

Exercice 7 (Cas particuliers)**.** On suppose que K est infini. Soit L une extension finie du corps K.

1. On suppose que L/K est monogène. Montrer, sans utiliser les invariants de similitude, que si $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ sont semblables sur L alors elles sont semblables sur K.
2. (*) Montrer le résultat précédent sans supposer que L/K est monogène.

Exercice 8 (Classes de similitude de polynôme caractéristique donné, BMP Exo 6.4 p. 312)**.**

1. Donner les invariants de similitude et les réduites de Frobenius correspondantes des matrices $M \in \mathrm{Mat}_4(K)$ de polynôme caractéristique $\chi_M = X^4$ pour $K \in \{\mathbb{F}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$. Dans le cas $K = \mathbb{C}$, donner également les réduites de Jordan.
2. Même question avec $\chi_M = X(X-1)(X-2)(X-3)$.

Exercice 9 (Un calcul d'invariants de similitude)**.** Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

est semblable sur K à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de l'Exemple 3.6.