Classification des isométries en dimensions 2 et 3

Salim Rostam
Complément d'algèbre pour l'agrégation, ENS Rennes

Référence : Mercier, *Cours de géométrie*, Chapitres 7 et 13. Voir aussi le Grifone, *Algèbre linéaire* (§7.10 et §A.8) et le Audin, *Géométrie* (§III.2 et §V.1).

1 Généralités

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. On rappelle que cela signifie que le groupe additif de E agit simplement transitivement sur $\mathcal{E}$, c'est-à-dire, pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ il existe un unique $u \in E$ (noté $\overrightarrow{MN}$) tel que $N = M + u$. En particulier, l'espace $\mathcal{E}$ est muni de la distance $d(M, N) := \|\overrightarrow{MN}\|$.

Définition 1.1. — Une *isométrie* de $\mathcal{E}$ est une application qui conserve les distances, c'est-à-dire $d\big(f(M), f(N)\big) = d(M, N)$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$.
— Une isométrie *affine* de $\mathcal{E}$ est une application affine, c'est-à-dire qui vérifie $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{MN}$ avec $\overrightarrow{f} \in \mathrm{L}(E)$, qui est une isométrie.
— Une isométrie *vectorielle* (ou endomorphisme *orthogonal*) de E est un endomorphisme de E qui conserve la norme (donc est une isométrie pour la structure naturelle d'espace affine sur E).

Proposition 1.2. *1. Les isométries vectorielles de E sont exactement les applications $E \to E$ qui conservent le produit scalaire.*

2. Une application affine f de $\mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

3. Une isométrie de $\mathcal{E}$ est nécessairement (une isométrie) affine. Plus précisément, une application $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si c'est une application affine de partie linéaire un endomorphisme orthogonal.

Démonstration. 1. Puisque ϕ conserve le produit scalaire on en déduit que ϕ conserve la norme. En développant $\|\phi(u+v) - \phi(u) - \phi(v)\|^2$ on trouve alors que $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$, et on fait pareil pour $\phi(\lambda u)$.

2. L'application affine f est une isométrie si et seulement si pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ on a $d\big(f(M), f(N)\big) = d(M, N)$ ssi pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ on a $\|\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$ ssi $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Le sens réciproque est classique et utilise la même idée.

3. On vient de voir que le sens indirect est vrai. Pour le sens direct, fixons un point $O \in \mathcal{E}$ et considérons l'application $\phi : E \to E$ donnée par $\phi\overrightarrow{OM} := \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Remarquons que ϕ est bien définie par simple transitivité de l'action de E sur $\mathcal{E}$. De plus, l'application ϕ conserve le produit scalaire, en effet puisque f conserve les distances on sait que ϕ conserve

la norme et :

$$\begin{aligned} d(f(M), f(N)) = d(M, N) \text{ donc } &\|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|^2 = \|\overrightarrow{NM}\|^2 \\ \text{donc } &\|\phi\overrightarrow{OM} - \phi\overrightarrow{ON}\|^2 = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\|^2 \\ \text{donc } &\langle \phi\overrightarrow{OM}, \phi\overrightarrow{ON}\rangle = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\rangle, \end{aligned}$$

donc ϕ conserve le produit scalaire (toujours par simple transitivité). Ainsi, par le premier point on sait que ϕ est linéaire, donc puisque ϕ conserve la norme on en déduit que ϕ est orthogonale. Finalement, l'application f est affine de partie linéaire ϕ puisque pour tous $M, N \in \mathcal{E}$ on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{f(O)f(N)} - \overrightarrow{f(O)f(M)} \\ &= \phi\overrightarrow{ON} - \phi\overrightarrow{OM} \\ &= \phi\overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.3. Attention, il existe des applications $E \to E$ qui conservent la norme mais qui ne sont pas linéaires. Par exemple, dans le cas $E = \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto |x|$!

Le groupe $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles de E possède un sous-groupe (distingué) $\mathrm{SO}(E)$ d'indice 2, donné par les isométries directes (= de déterminant 1), isomorphe à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vérifient $MM^\top = I_n$ donc commutent avec leurs transposées donc sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ (trigonaliser M), de valeurs propres vérifiant $\lambda\overline{\lambda} = 1$. De plus, si $e^{i\theta}$ est valeur propre alors $e^{-i\theta}$ également donc $M \sim \mathrm{diag}(e^{i\theta_k}, e^{-i\theta_k})_k$ avec une diagonale de ± 1 (au plus un de chaque, car on peut les regrouper selon la forme précédente) $\sim \mathrm{diag}\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{smallmatrix}\right)_k$ (idem) et cette dernière matrice est semblable à M sur $\mathbb{R}$ par un résultat classique. Pour obtenir $\mathrm{O}(E)$ à partir de $\mathrm{SO}(E)$, il suffit l'exhiber une isométrie indirecte (= de déterminant -1). Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan fait l'affaire, par exemple une application de matrice $\mathrm{diag}(-1, I_{n-1})$ dans une $BONd$.

Le groupe des isométries affines (directes) de $\mathcal{E}$ est noté $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ ($\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$). Les éléments de $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ sont les *déplacements* de $\mathcal{E}$, et ceux de $\mathrm{Is}^-(\mathcal{E}) := \mathrm{Is}(\mathcal{E}) \setminus \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ sont les *anti-déplacements*.

Lemme 1.4. *Si $f \in \mathrm{O}(E)$ alors $E = \ker(f - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{im}(f - \mathrm{id})$.*

Démonstration. Par le théorème du rang, il suffit de montrer que la somme est orthogonale. Si $x \in \ker(f - \mathrm{id})$ et $y \in E$, on a $f(x) = x$ et donc :

$$\begin{aligned} \langle x, f(y) - y\rangle &= \langle x, f(y)\rangle - \langle x, y\rangle \\ &= \langle f(x), f(y)\rangle - \langle x, y\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

La classification qui va suivre repose sur le résultat suivant.

Théorème 1.5 (Forme canonique)**.** *Tout isométrie affine f s'écrit de façon unique*

$$f = t_u \circ g = g \circ t_u,$$

où $u \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$ et $g \in \mathrm{Is}(\mathcal{E})$ possède au moins un point fixe.

Démonstration. (Cf. Mercier, §13.2.1 Thm 203 p.261.) On note $\phi \coloneqq \overrightarrow{f}$. Soit A un point quelconque et $V \coloneqq \overrightarrow{Af(A)} + \mathrm{im}(\phi - \mathrm{id})$. Notons que, par le Lemme 1.4, l'intersection $\ker(\phi - \mathrm{id}) \cap V$ est réduite à un point puisque les directions de ces deux sous-espaces affines sont supplémentaires (en voyant $\mathbb{R}^2$ comme un espace affine sur lui-même). On peut retrouver ce résultat directement puisque si F et G sont supplémentaires, alors avec $x = f_x + g_x$, si $y \in (x + F) \cap G$ alors $y = g_x + f = g$ donc $f = g - g_x \in F \cap G$ donc $f = 0$ et $g = g_x$ donc nécessairement $y = g_x$ est unique.

Existence Soit u l'unique point de $\ker(\phi - \mathrm{id}) \cap V$. Puisque $u \in V$, il existe O tel que

$$\begin{aligned} u &= \overrightarrow{Af(A)} + (\phi - \mathrm{id})(\overrightarrow{AO}) \\ &= \overrightarrow{Af(A)} + \phi(\overrightarrow{AO}) + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{Of(A)} + \overrightarrow{f(A)f(O)} \\ &= \overrightarrow{Of(O)}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'isométrie $g \coloneqq t_{-u} \circ f$ vérifie :

$$\begin{aligned} g(O) &= f(O) - u \\ &= f(O) + \overrightarrow{f(O)O} \\ &= O, \end{aligned}$$

donc O est un point fixe de g comme voulu.

Pour la commutativité, on sait déjà que $f = t_u \circ g$ et $g \circ t_u$ ont la même partie linéaire, donc il suffit de montrer qu'elles coïncident en un point. Avec $O' \coloneqq O + u$, on a $f(O) = t_u \circ g(O) = O'$ et $g \circ t_u(O) = g(O')$. Or, on a $u = \overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{OO'} \in \ker(\phi - \mathrm{id}) = \ker(\overrightarrow{g} - \mathrm{id})$ (car $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$) donc :

$$g(O') = g(O) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OO'}) = O + \overrightarrow{OO'} = O',$$

ce qui conclut.

Unicité Soit $f = t_v \circ h$ une autre décomposition, avec $v \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$ et $h \in \mathrm{Is}(E)$ avec au moins un point fixe. Soit O un point fixe de h. On a $v = \overrightarrow{h(O)f(O)} = \overrightarrow{Of(O)} \in \ker(\phi - \mathrm{id})$. On a de plus :

$$\begin{aligned} v &= \overrightarrow{Of(O)} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(O)} \\ &= \overrightarrow{Af(A)} + (\phi - \mathrm{id})(\overrightarrow{AO}) \in V, \end{aligned}$$

donc $v \in \ker(\phi - \mathrm{id}) \cap V$. On a vu que cette intersection est réduite au singleton $\{u\}$, ainsi $v = u$ et $h = t_{-u} \circ f = g$. (Remarque que la commutativité de la décomposition $f = t_v \circ h$ n'a pas été utilisée.)

□

2 Isométries en dimension 2

On suppose ici $n = 2$, en particulier $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^2_{\mathrm{aff}}$ est le plan affine de direction $E \simeq \mathbb{R}^2_{\mathrm{ev}}$.

2.1 Isométries vectorielles

Le résultat de réduction des éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est ici plus fort, puisque toute matrice $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est *de la forme* $R_\theta := \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. On peut retrouver ce résultat simplement via $MM^\top = I_2$ et $\det M = 1$. En effet, si $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ alors $MM^\top = I_2$ donne entre autre :

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0, \end{cases}$$

donc $c = \sin\theta$ et $d = \cos\theta$. La condition $\det M = 1$ donne $\cos(\theta)a - \sin(\theta)b = 1$, donc couplé à la deuxième équation ci-dessus on trouve $a = \cos\theta$ et $b = -\sin\theta$.

Lemme 2.1. *La matrice R_θ est la matrice dans la base canonique de la rotation vectorielle d'angle θ.*

Démonstration. Le vecteur $(x, y)^\top$ est envoyé sur :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}.$$

Avec l'identification standard de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, le complexe $x + iy$ a donc été envoyé sur :

$$\cos(\theta)x - \sin(\theta)y + i\big[\sin(\theta)x + \cos(\theta)y\big] = (x + iy)\big[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big] = (x + iy)e^{i\theta}.$$

On conclut car l'argument est augmenté de θ. □

On s'intéresse maintenant aux isométries vectorielles indirectes. Avec $s := \operatorname{diag}(1, -1)$ (ou n'importe quelle isométrie indirecte), on a $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})s$. En particulier, les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont de la forme $R'_\theta := R_\theta s = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

Lemme 2.2. *La matrice R'_θ est la matrice dans la base canonique de la réflexion axiale d'axe la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$ (qui passe par $e^{\frac{i\theta}{2}}$).*

Démonstration. Cette réflexion est donnée par $z \mapsto e^{i\frac{\theta}{2}}\overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}z} = e^{i\theta}\bar{z}$, ainsi $x + iy$ est envoyé sur :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) = (x\cos\theta + y\sin\theta) + i(x\sin\theta - y\cos\theta),$$

donc on retrouve bien la matrice R'_θ. □

Remarque 2.3. On a donc classifié les isométries linéaires du plan : ce sont l'identité, les rotations et les symétries axiales.

Remarquons que le produit de deux symétries axiales est une rotation (cf. déterminant). On peut être plus précis.

Lemme 2.4. *On a $R'_\theta = R_\theta s = sR_{-\theta}$.*

Démonstration. On a $s^2 = 1$ donc $sR_\theta s = sR_\theta s^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) = R_{-\theta}$. □

Remarque 2.5. Cela montre que $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \langle s \rangle$ agit sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ par conjugaison. Puisque $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$ on a donc $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U} \rtimes \{\pm 1\}$ où l'action est maintenant simplement la multiplication.

En particulier, on obtient $R'_\theta R'_\eta = (R_\theta s)(sR_{-\eta}) = R_\theta R_{-\eta} = R_{\theta-\eta}$. Dans l'autre sens, on a $R_t = R'_{t+s}R'_s$ pour tout s, donc on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.6. *La rotation d'angle t est la composée de deux symétries axiales donc les axes différent d'un angle de $\frac{t}{2}$ (tout tel couple convient).*

En particulier, avec le théorème de réduction des éléments de $\mathrm{O}(E)$ on en déduit la version linéaire du théorème de Cartan–Dieudonné.

Théorème 2.7 (Cartan–Dieudonné linéaire)**.** *Tout élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme le produit d'au plus n réflexions.*

La version affine de ce théorème affirme que toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme le produit de $n+1$ réflexions. Nous illustrerons ce théorème pour $n \in \{2, 3\}$, le cas général consistant en une récurrence qui utilise un hyperplan médiateur (entre M et $f(M)$), cf. Mercier §13.4.3.

2.2 Isométries affines

Lemme 2.8. *Une isométrie de partie linéaire l'identité est une translation.*

Démonstration. C'est la relation de Chasles : $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bf(B)} + \overrightarrow{f(B)f(A)} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bf(B)} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{Bf(B)}$, ainsi avec $u \coloneqq \overrightarrow{Af(A)}$ on a $f = t_u$. □

Lemme 2.9. *Soit $\Omega \in \mathcal{E}$. Une isométrie f est une rotation de centre Ω si et seulement si $f(\Omega) = \Omega$ et $\overrightarrow{f} \in \mathrm{SO}(E)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} f \text{ est une rotation de centre } \Omega &\iff f(\Omega) = \Omega \text{ et pour tout point } M \text{ on a } \overrightarrow{\Omega f(M)} = R_\theta \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff f(\Omega) = \Omega \text{ et } \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = R_\theta \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff f(\Omega) = \Omega \text{ et } \overrightarrow{f} u = R_\theta u \text{ pour tout vecteur } u \\ &\iff f(\Omega) = \Omega \text{ et } \overrightarrow{f} = R_\theta. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.10 (Classification des déplacements)**.** *Les déplacements du plan sont les translations et les rotations (rotations de centre un point de $\mathbb{R}^2$).*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Is}^+(E)$. On a donc $\phi \coloneqq \overrightarrow{f} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ donc 1 est valeur propre de ϕ si et seulement si $\phi = \mathrm{id}$. Si c'est le cas alors f est une translation par le Lemme 2.8, et sinon ϕ n'a pas de point fixe donc le vecteur u du Théorème 1.5 est nécessairement nul donc f possède un point fixe. Ainsi, l'isométrie f possède un point fixe et est de partie linéaire la rotation d'angle θ donc f est la rotation (affine) de centre Ω et d'angle θ par le Lemme 2.9. □

Il reste donc maintenant à classifier les anti-déplacements.

Définition 2.11. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine. La *réflexion* $s_{\mathcal{D}}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$.

Lemme 2.12. *Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$. Une isométrie f est la réflexion par rapport à $\mathcal{D}$ si et seulement si f fixe un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{f}$ est la réflexion de droite $\overrightarrow{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. Soit f la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}$. Si M est un point quelconque, son projeté orthogonal H sur $\mathcal{D}$ est fixe par définition et $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{Hf(M)}$ donc $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{f(H)f(M)} = \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{HM}$ donc $\overrightarrow{f}$ induit $-\mathrm{id}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$. Puisque f fixe $\mathcal{D}$ on a que $\overrightarrow{f}$ fixe $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ donc finalement $\overrightarrow{f}$ est bien la réflexion de droite $\overrightarrow{\mathcal{D}}$.

Réciproquement, on suppose que f fixe un point Ω de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{f}$ est la réflexion de droite $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Soit M un point et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. En utilisant le fait que $\overrightarrow{H\Omega} \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{HM} \in \mathcal{D}^\perp$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Hf(M)} &= \overrightarrow{H\Omega} + \overrightarrow{\Omega f(M)} \\
&= \overrightarrow{H\Omega} + \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} \\
&= \overrightarrow{H\Omega} + \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{\Omega M} \\
&= \overrightarrow{H\Omega} + \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{\Omega H} + \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{HM} \\
&= \overrightarrow{H\Omega} + \overrightarrow{\Omega H} - \overrightarrow{HM} \\
&= \overrightarrow{MH},
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Définition 2.13. Une *réflexion glissée* est une isométrie de la forme $t_u s_{\mathcal{D}}$ où $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \setminus \{0\}$.

Remarque 2.14. Une réflexion glissée ne possède pas de point fixe. En effet, si M est fixe par $t_u s_{\mathcal{D}}$ avec $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ alors $t_u s_{\mathcal{D}}(M) = M$ donc $s_{\mathcal{D}}(M) + u = M$ donc $u \in \overrightarrow{s_{\mathcal{D}}(M)M} = \overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$ donc $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \cap \overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp = \{0\}$.

Théorème 2.15 (Classification des anti-déplacements)**.** *Les anti-déplacements du plan sont les réflexions et les réflexions glissées.*

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Is}^-(\mathcal{E})$ que l'on écrit $f = t_u \circ g$ comme dans le Théorème 1.5 alors $g \in \mathrm{Is}^-(E)$ donc $\overrightarrow{g} \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ donc $\overrightarrow{g}$ est une symétrie d'axe $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et de plus $u \in \ker(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \overrightarrow{\mathcal{D}}$. Si Ω est un point fixe de g (qui existe par le Théorème 1.5) alors $g = s_{\mathcal{D}}$ avec $\mathcal{D} := \Omega + \overrightarrow{\mathcal{D}}$ par le Lemme 2.12. Ainsi, si $u = 0$ alors f est une réflexion et sinon f est une réflexion glissée puisque $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$. □

On a donc montré le résultat suivant, que l'on énonce selon la nature de l'espace des points fixes (c'est toujours vide ou un espace affine par image inverse). La mention « (d) » (resp. « (ad) ») signifie « déplacement » (resp. « anti-déplacement »).

Corollaire 2.16 (Classification des isométries du plan)**.** *Les isométries du plan sont de la nature suivante.*

— *Si* $\mathrm{Fix}(f) = \mathbb{R}^2$ *alors* $f = \mathrm{id}$ *(d).*
— *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est une droite alors* f *est une réflexion (ad)*
— *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est un point alors* f *est une rotation (d).*
— *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est vide alors* f *est une translation (d) ou une réflexion glissée (ad).*

Remarque 2.17. Si $\mathrm{Fix}(f)$ est vide, il y a deux possibilités pour $\dim\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$:

— si c'est 2 alors f est une translation ;
— si c'est 1 alors f est une réflexion glissée.

2.3 Comportement de la classification

C'est bien beau d'avoir une classification, mais étant donné que $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ est un groupe, comment décrire (au sens du Théorème 1.5) le produit des éléments de la classification ? Pour identifier les produits, on va utiliser la philosophie du théorème de Cartan–Dieudonné (Théorème 2.7). Remarquons qu'on déduit les compositions impliquant des réflexions glissées.

Proposition 2.18 (Composée de deux réflexions)**.** *Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites.*

- *Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{\Omega\}$ alors $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} = r_{\Omega,2\theta}$ où θ est l'angle entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.*
- *Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles alors $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} = t_{2u}$ où $u \in \mathcal{D}^{\perp}$ est l'unique vecteur tel que $D' = t_u(\mathcal{D}) = \mathcal{D} + u$.*

Démonstration. Le premier point a été vu lors de la Proposition 2.6. Pour le deuxième, d'après le Lemme 2.2 on sait que la partie linéaire est l'identité, donc $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est une translation par le Lemme 2.8. Pour trouver u on regarde l'image d'un point de $\mathcal{D}$. □

Proposition 2.19 (Composée de deux rotations)**.** *Soient Ω, Ω' deux points et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.*

- *On a $r_{\Omega,\theta'} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta+\theta'}$.*
- *Si $\Omega \neq \Omega'$ alors :*
  - *si $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$ alors $r_{\Omega',\theta'} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega'',\theta+\theta'}$ (avec Ω'' déterminé dans la preuve) ;*
  - *si $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$ alors $r_{\Omega',\theta'} \circ r_{\Omega,\theta} = t_u$ (avec u déterminé dans la preuve).*

Démonstration. Le cas $\Omega = \Omega'$ est clair. On suppose maintenant $\Omega \neq \Omega'$, où les affirmations sans les détails des parenthèses sont claires par les parties linéaires. D'après la Proposition 2.6, avec $\Delta := (\Omega\Omega')$ et $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) la droite passant par Ω telle que $(\Delta, \mathcal{D}) = \frac{\theta}{2}$ (resp. passant par Ω' telle que $(\mathcal{D}', \Delta) = \frac{\theta'}{2}$) alors $r_{\Omega,\theta} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\Delta}$ et $r_{\Omega',\theta'} = s_{\Delta} s_{\mathcal{D}'}$. On en déduit que la composée vaut $s_{\mathcal{D}} s_{\mathcal{D}'}$, que l'on connait par la Proposition 2.18 (remarquons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi}$ puisque $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{\theta+\theta'}{2}$). □

Proposition 2.20 (Composée de deux translations)**.** *On a $t_v \circ t_u = t_{u+v}$.*

Proposition 2.21 (Composée d'une réflexion et d'une translation)**.** *Soit $u \neq 0$ et $\mathcal{D}$ une droite. Si $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ alors $t_u \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}+\frac{u}{2}}$ est une réflexion et sinon $t_u \circ s_{\mathcal{D}}$ est une réflexion glissée (éléments caractéristiques déterminés dans la preuve).*

Démonstration. On décompose $u = u_{||} + u_{\perp}$ sur la décomposition $E = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$. Par la Proposition 2.18, on sait que $t_{u_\perp} = s_{\mathcal{D}+\frac{u_\perp}{2}} s_{\mathcal{D}}$ donc $t_{u_\perp} \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}+\frac{u_\perp}{2}}$. On a $t_u = t_{u_{||}} \circ t_{u_\perp}$ donc $t_u \circ s_{\mathcal{D}} = t_{u_{||}} \circ s_{\mathcal{D}+\frac{u_\perp}{2}}$ est une symétrie glissée puisque $\overrightarrow{\mathcal{D} + \frac{u_\perp}{2}} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \ni u_{||}$. (On peut remarquer que $\mathcal{D} + \frac{u_\perp}{2} = \mathcal{D} + \frac{u}{2}$.) □

Proposition 2.22 (Composée d'une réflexion et d'une rotation)**.** *Soit Ω un point, θ un angle et $\mathcal{D}$ une droite.*

- *Si $\Omega \in \mathcal{D}$ alors $s_{\mathcal{D}} \circ r_{\Omega,\theta} = s_{\Delta}$ où $\Omega \in \Delta$ et $(\Delta, \mathcal{D}) = \frac{\theta}{2}$.*
- *Si $\Omega \notin \mathcal{D}$ alors $s_{\mathcal{D}} \circ r_{\Omega,\theta} = t_u \circ s_{\Delta}$, où $u := \overrightarrow{\Omega H}$ avec H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ et $(\mathcal{D}, \Delta) = \frac{\theta}{2}$, est soit une réflexion glissée (si $\theta = 0 \pmod{\pi}$) soit une réflexion.*

Démonstration. Par la Proposition 2.6 on a $r_{\Omega,\theta} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ où Δ, Δ' se coupent en Ω avec Δ' parallèle à $\mathcal{D}$ et $(\Delta, \Delta') = \frac{\theta}{2}$. Si u est l'unique vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ tel que $\mathcal{D} = \Delta' + u$ alors, par la Proposition 2.18 :

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{D}} \circ r_{\Omega,\theta} &= s_{\mathcal{D}} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \\ &= t_u \circ s_{\Delta}, \end{aligned}$$

ce qui conclut puisque $u = 0$ si et seulement si $\Omega \in \mathcal{D}$. On trouve la forme finale par la Proposition 2.21, puisque $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ donc $u \in \Delta$ si et seulement si $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. □

Proposition 2.23 (Composée d'une rotation et d'une translation)**.** *La composée d'une translation et d'une rotation est soit une translation soit une rotation (de même angle).*

Démonstration. On a $r_{\Omega,\theta} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ avec $(\mathcal{D}', \mathcal{D}) = \frac{\theta}{2}$ par la Proposition 2.6. Par la Proposition 2.18, on a $t_u = s_{\mathcal{D}-\frac{u}{2}} s_{\mathcal{D}}$ donc on trouve $t_u r_{\Omega,\theta} = s_{\mathcal{D}-\frac{u}{2}} s_{\mathcal{D}'}$. On conclut par la Proposition 2.6. $\square$

Remarque 2.24. On retrouve bien que l'ensemble des rotations-translations est un sous-groupe de $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ (on le savait déjà avec les parties linéaires).

On pourrait faire un tableau récapitulatif, mais sans mettre de détails sur les éléments caractéristiques cela revient à regarder le déterminant.

3 Isométries en dimension 3

On suppose ici $n = 3$, en particulier $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^3_{\mathrm{aff}}$ est l'espace affine de direction $E \simeq \mathbb{R}^3_{\mathrm{ev}}$.

3.1 Isométries vectorielles

On va classifier les isométries vectorielles en fonction de la dimension de leur espace de points fixes. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Bien entendu, si $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 3$ alors $u = \mathrm{id}_E$.

Proposition 3.1. *Si* $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 2$ *alors u est la réflexion de plan* $\ker(u - \mathrm{id})$*, c'est-à-dire, la symétrie orthogonale par rapport au plan* $\ker(u - \mathrm{id})$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{P} := \ker(u - \mathrm{id})$ et $\mathcal{D} := \mathcal{P}^\perp$. Puisque $\mathcal{P}$ est stable par u on sait que $\mathcal{D}$ est stable par $u^* = u^{-1}$ donc $\mathcal{D}$ est stable par u (on a $u^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ mais puisque u^{-1} préserve la dimension on a $u^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D} = u(\mathcal{D})$). En regardant la matrice de u dans une base adaptée à $\mathcal{P} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{D}$ on voit que u induit un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{D}$, donc $\tilde{u}_{\mathcal{D}} = \pm \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ donc $\tilde{u}_{\mathcal{D}} = -\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ puisque $u \neq \mathrm{id}_E$. Ainsi u est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. $\square$

Remarque 3.2. De façon générale, en dimension n une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Définition 3.3. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ* l'endomorphisme $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \oplus R_\theta$ où R_θ est vu comme un endomorphisme de $\mathcal{D}^\perp$.

Proposition 3.4. *Si* $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 1$ *alors u est une rotation, d'axe* $\ker(u - \mathrm{id})$ *et d'angle* $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ *vérifiant* $\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(u)-1}{2}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{D} := \ker(u - \mathrm{id})$. Comme dans la preuve de la Proposition 3.1, l'endomorphisme u induit un endomorphisme orthogonal $\tilde{u}$ de $\mathcal{P} := \mathcal{D}^\perp$. Puisque $\dim \ker(\tilde{u} - \mathrm{id}_{\mathcal{P}}) = 0$, on en déduit par le Lemme 2.2 que nécessairement $\tilde{u} \in \mathrm{SO}(\mathcal{P})$ donc $\tilde{u}$ est une rotation, d'angle θ. On conclut puisqu'une matrice de u dans une base adaptée à $\mathcal{D} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}$ est $\mathrm{diag}(1, R_\theta)$ donc $\mathrm{tr}\, u = 1 + 2\cos\theta$. $\square$

Proposition 3.5. *Si* $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 0$ *et* $u \neq -\mathrm{id}$ *alors il existe une unique droite $\mathcal{D}$ telle que $u = r \circ s = s \circ r$ où r une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et s la réflexion par rapport à $\mathcal{D}^\perp$. Réciproquement, si* $r \neq \mathrm{id}$ *alors $r \circ s = s \circ r$ ne possède pas de point fixe non nul.*

Démonstration. On prouve tout d'abord l'existence. D'après le théorème de réduction générale, puisque $\dim E = 3$ est pair on sait que 1 ou -1 est valeur propre de u. Par hypothèse 1 n'est pas valeur propre, donc -1 est valeur propre de u. Soit $\mathcal{D}$ une droite propre et $\mathcal{P} := \mathcal{D}^\perp$. Encore une fois, l'endomorphisme u induit un endomorphisme orthogonal $\tilde{u}$ sur $\mathcal{P}$, qui ne possède pas de point fixe non nul, donc $\tilde{u}$ est une rotation, d'angle θ. Dans une base adaptée à $\mathcal{D} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}$, la matrice de u est donc $\operatorname{diag}(-1, R_\theta)$. L'existence de la décomposition est assurée par un calcul par blocs.

Montrons maintenant l'unicité. Comme lors de la preuve du Théorème 1.5, on ne va pas utiliser la propriété de commutativité. Supposons $u = r \circ s$. En prenant une base adaptée à la décomposition $\mathcal{D} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}$, une matrice de u est $\operatorname{diag}(-1, R_\theta)$ donc celle de u^2 est $\operatorname{diag}(1, R_{2\theta})$. Par la Proposition 3.4, on sait que u^2 est la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ. On en conclut que $\mathcal{D} = \ker(u^2 - \mathrm{id})$ est uniquement déterminée si $2\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire, si $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$. Mais si $\theta = 0$ alors $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 2$ ce qui est impossible, et si $\theta = \pi$ alors $u = -\mathrm{id}$ ce qui a été exclus. Finalement, la réflexion s est uniquement déterminée, donc $r = u \circ s$ également. □

Remarque 3.6. Si $u = -\mathrm{id}$ alors $u = r \circ s = s \circ r$ où r est le demi-tour d'axe $\mathcal{D}$ pour n'importe quelle droite $\mathcal{D}$ (on perd donc l'unicité, comme on l'a vu dans la démonstration). (Voir aussi Remarque 3.9.)

Définition 3.7. Les endomorphismes de la forme $r \circ s$ où r est une rotation (différente de l'identité) d'axe $\mathcal{D}$ et s la réflexion de plan $\mathcal{D}^\perp$ sont appelés *rotation réfléchies.*

Remarque 3.8. Le terme rotation réfléchie n'est pas standard, mais reflète la forme de l'isométrie. On trouve les termes *symétrie-rotation* (par exemple dans le Mercier) ou *anti-rotation* (par exemple dans le Audin).

On peut récapituler les résultats précédents. Soit $u \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$:

— si $u \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ alors u est soit l'identité soit une rotation, auquel cas $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 1$;

— si $u \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$ alors u est soit un réflexion, auquel cas $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 2$, soit une rotation réfléchie, auquel cas $\dim \ker(u - \mathrm{id}) = 0$.

Remarque 3.9. On peut se demander comment rentre la symétrie centrale $\sigma = -\mathrm{id}$ dans cette classification. On a $\dim \ker(\sigma - \mathrm{id}) = 0$ donc c'est une rotation réfléchie, et en effet la matrice de σ dans une base (n'importe laquelle) est $-I_3 = \operatorname{diag}(-1, I_2)\operatorname{diag}(1, -I_2) = \operatorname{diag}(-1, I_2)\operatorname{diag}(1, R_\pi)$.

Finalement, on peut donner l'analogue de la Proposition 2.6.

Proposition 3.10. *Toute rotation d'axe $\mathcal{D}$ peut s'écrire comme le produit $s \circ s'$ deux deux réflexions par rapport à des plans qui contiennent $\mathcal{D}$, dont l'un peut être choisi arbitrairement. Réciproquement, si s (resp. s') est une réflexion de plan $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) avec $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ alors $s \circ s'$ est une rotation d'axe $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.*

Démonstration. La réciproque est clair puisque $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est fixe par $r := s \circ s'$, ainsi r est soit l'identité, soit une réflexion soit une rotation et on conclut puisque $\det r = 1$.

Pour le sens direct, on sait que dans $\mathcal{D}^\perp$ la rotation r se restreint en une rotation de $\mathcal{D}^\perp$, qui peut être écrite comme un produit de deux réflexions du plan $\mathcal{D}^\perp$ (dont l'une étant arbitraire), cf. Proposition 2.6. Soient Δ_1, Δ_2 sont les axes de ces réflexions et notons s_1, s_2 les réflexions de plan respectifs $\mathcal{D} \overset{\perp}{\oplus} \Delta_1$ et $\mathcal{D} \overset{\perp}{\oplus} \Delta_2$. On alors $r = s_1 \circ s_2$ sur $\mathcal{D}^\perp$ par hypothèse mais aussi $r = s_1 \circ s_2$ sur $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}$ est fixe par s_1 et s_2 par construction. □

3.2 Isométries affines

Comme pour la dimension 2, on a les résultats suivants.

Lemme 3.11. *Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$.*

— *f est une rotation de centre Ω si et seulement si $f(\Omega) = \Omega$ et $\overrightarrow{f}$ est une rotation.*

— *f est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si f fixe un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{f}$ est la réflexion de plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.*

Comme pour la dimension 2, on va utiliser le Théorème 1.5. Ce dernier théorème justifie la définition suivante.

Définition 3.12. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \setminus \{0\}$. Un *vissage* (ou *rotation glissée*) d'axe $\mathcal{D}$ est une isométrie affine de la forme $t_u \circ r_{\mathcal{D}} = r_{\mathcal{D}} \circ t_u$ où $r_{\mathcal{D}}$ est une rotation d'axe $\mathcal{D}$.

Remarque 3.13. Contrairement au cas de la dimension 2 (cf. Remarque 2.24), l'ensemble des rotations-translations ne forme pas un sous-groupe de $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$.

Théorème 3.14 (Classifications des déplacements)**.** *Les déplacements de l'espace sont les translations, les rotations ou les vissages.*

Démonstration. Soit f un déplacement, que l'on écrit $f = t_u \circ g$ comme dans le Théorème 1.5, en particulier $u \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$. On a $g \in \mathrm{SO}(E)$ donc par le §3.1 on a soit $\overrightarrow{g} = \mathrm{id}$ soit $\overrightarrow{g}$ est une rotation d'axe $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Puisque g possède un point fixe Ω, on en déduit que soit $g = \mathrm{id}$ soit g est une rotation d'axe $\mathcal{D} := \Omega + \overrightarrow{\mathcal{D}}$. Si $g = \mathrm{id}$ alors f est une translation, sinon si $u = 0$ alors f est une rotation et si $u \neq 0$ alors $u \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}) = \ker(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \overrightarrow{\mathcal{D}}$ donc f est un vissage. $\square$

De façon analogue à la dimension 2, une réflexion glissée de $\mathcal{E}$ est une isométrie affine de la forme $t_u \circ s_{\mathcal{P}} = s_{\mathcal{P}} \circ t_u$ où $u \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $s_{\mathcal{P}}$ est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$. De façon analogue cette fois au cas linéaire, une rotation réfléchie de $\mathcal{E}$ est une isométrie affine de la forme $r_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{P}} = s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D}}$ où $r_{\mathcal{D}}$ est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et $s_{\mathcal{P}}$ est la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{D}} \perp \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Théorème 3.15 (Classification des anti-déplacements)**.** *Les anti-déplacements de l'espace sont les réflexions, les réflexions glissées et les rotations réfléchies.*

Démonstration. Par le Théorème 1.5, on a $f = t_u \circ g$ avec $u \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$ et g un anti-déplacement qui possède un point fixe Ω. D'après le §3.1, on sait que :

1. soit $\overrightarrow{g}$ est une réflexion $s_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, auquel cas $u \in \ker(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \overrightarrow{\mathcal{P}}$;
2. soit $\overrightarrow{g}$ est une rotation réfléchie $s_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \circ r_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$, qui n'a pas de point fixe d'après §3.1 donc $u = 0$.

On obtient alors respectivement :

1. $g = s_{\Omega + \overrightarrow{\mathcal{P}}}$ et $f = t_u \circ g$ est une réflexion si $u = 0$ et une réflexion glissée sinon (on a bien $u \in \ker(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \overrightarrow{\mathcal{P}}$) ;
2. $f = g = s_{\Omega + \overrightarrow{\mathcal{P}}} \circ r_{\Omega + \overrightarrow{\mathcal{D}}}$ est une rotation réfléchie.

$\square$

On a donc montré le résultat suivant, que l'on énonce selon la nature de l'espace des points fixes (c'est toujours vide ou un espace affine par image inverse). La mention « (d) » (resp. « (ad) ») signifie « déplacement » (resp. « anti-déplacement »).

Corollaire 3.16 (Classification des isométries de l'espace)**.** *Les isométries de l'espace sont de la nature suivante.*

— *Si* $\mathrm{Fix}(f) = \mathbb{R}^3$ *alors* $f = \mathrm{id}$ *(d).*
— *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est un plan alors* f *est une réflexion (ad).*
— *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est une droite alors* f *est une rotation (d).*
— *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est un point alors* f *est une rotation réfléchie (ad).*
— *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est vide alors* f *est une translation (d), une réflexion glissée (ad) ou un vissage (d).*

Remarque 3.17. Si $\mathrm{Fix}(f)$ est vide, il y a trois possibilités pour $\dim\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$:
- — si c'est 3 alors f est une translation ;
- — si c'est 2 alors f est une réflexion glissée ;
- — si c'est 1 alors f est un vissage.

Remarque 3.18. C'est essentiellement la même classification que dans le cas du plan, à la différence près que :
- — on a augmenté la dimension à partir du point, le nouvel arrivant étant les rotations réfléchies ;
- — il y a maintenant également les vissages parmi les isométries sans point fixe.

3.3 Comportement de la classification

Comme dans le cas du plan, pour déterminer la composée de deux éléments de la classification on peut utiliser la philosophie du théorème de Cartan–Dieudonné et décomposer chaque isométrie en produit de réflexions. On a déjà vu que le produit de deux réflexions fait une rotation si les plans sont distincts (conséquence directe de la Proposition 3.10), et une translation si les plans sont parallèles (même démonstration que dans le cas où $\dim E = 2$, cf. Proposition 2.18). Par composition on peut alors décomposer les rotations réfléchies, les vissages et les réflexions glissées en produit de réflexions (si besoin, bien choisies).