Exercices d'applications directes dont le jury attend une réponse nette et précise

Propositions (partielles) de réponses

Salim Rostam
Complément d'algèbre pour l'agrégation, ENS Rennes

1 Algèbre linéaire

Exercice 3.

1. On peut calculer l'image des 36 produits, mais en fait il suffit de vérifier les images pour les « relations de tresses » $s_i^2 = 1$ et $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ (pour $\mathfrak{S}_n$ avec $n \geq 4$ il faut vérifier $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ et $s_i s_j = s_j s_i$ pour $|i-j| > 1$). On a bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   et :

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Si la représentation est réductible, elle contient donc une sous-représentation V de dimension 1, engendrée par un vecteur non nul (x, y). Par stabilité par s_2 on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $-y = \lambda x$ et $-x = \lambda y$ donc $x = \lambda^2 x$ et $y = \lambda^2 y$ donc puisque $(x, y) \neq (0, 0)$ on obtient $\lambda = \pm 1$ donc $x = \pm y$ donc $V = \mathbb{C}(1, 1)^\top$ ou $V = \mathbb{C}(1, -1)^\top$. Mais dans le premier cas, l'action de s_1 donne $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \notin V$, et dans le deuxième cas on a de même $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Ce vecteur est dans V ssi il existe $\lambda \in k$ tel que $(1, -1) = \lambda(1, 2)$ *i.e.* $\lambda = 1$ et $-1 = 2\lambda$ ssi $-1 = 2$ ssi k est de caractéristique 3. Ainsi, la représentation est irréductible ssi k est de caractéristique différente de 3.

3. Une représentation naturelle de $\mathfrak{S}_3$ est l'action par permutation sur $\mathbb{C}^3$. Elle est de dimension 3, et non irréductible puisque $\mathbb{C}(1, 1, 1)^\top$ est une sous-représentation. Son orthogonal est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Des vecteurs naturels de ce plan sont du type $(1, -1, 0)$, on va voir si de tels vecteurs conviennent. On a $s_1 e_2 = -e_2$ donc $e_2 = (\pm 1, \mp 1, 0)$, et $s_2 e_2 = -e_1$ donc $e_1 = (\mp 1, 0, \pm 1)$. En prenant les signes du haut on constate que $e_1 \coloneqq (-1, 0, 1)$ et $e_2 \coloneqq (1, -1, 0)$ fonctionnent.

Exercice 4. C'est $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -8 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique vers la nouvelle base (c'est-à-dire la matrice de la nouvelle base dans la base canonique), alors $X = PX'$ où X (resp. X') est le vecteur coordonnées d'un vecteur dans la base canonique (resp. nouvelle base). On a de même $Y = PY'$ et si $Y = MX$ on en déduit que $PY' = MPX'$ donc $P^{-1}MP$ est la matrice recherchée. Il reste donc à inverser P ! On peut inverser le système $Y = PX$ via la méthode de Gauss, et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -11 \\ 3 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour voir si on ne s'est pas trop trompé, on peut vérifier la première colonne : l'image de $e_1 + e_2$ est $(1, 0, 2)^\top$, et :

$$\begin{aligned} -2(e_1 + e_2) + 3(e_1 + e_3) + (2e_2 - e_3) &= -2(1, 1, 0)^\top + 3(1, 0, 1)^\top + (0, 2, -1)^\top \\ &= (1, 0, 2)^\top. \end{aligned}$$

Exercice 6.

1. On utilise absolument la formule, valable pour les matrices 2×2 uniquement, $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$. On trouve $\chi = X^2 - 5X - 2$.
2. On peut ici utiliser la formule suivante, valable pour les matrices 3×3 uniquement :

   $$\chi_A = X^3 - \operatorname{tr}(A)X^2 + \operatorname{tr}(\operatorname{com} A)X - \det A,$$

   où $\operatorname{tr}(\operatorname{com} A)$ est simplement la somme des mineurs diagonaux de taille 2, et où le déterminant peut se calculer avec la règle de Sarrus (surtout utile quand la matrice a des zéros). On trouve ici :

   $$\begin{aligned} \chi = X^3 - (1 - 1 - 2)X^2 &+ \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) X \\ &- \big(1(-1)(-2) + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1(-1)1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 \cdot 2\big) \\ = X^3 - (-2)X^2 &+ (-7 - 3 + 0)X - \big(2 + 4 + 3 - (-1) - 2 - (-12)\big) \\ = X^3 + 2X^2 &- 10X - (20). \end{aligned}$$

3. Pour le polynôme de degré 3, on recherche une racine « évidente », donc ici un entier n qui divise 20. On trouve que -2 est racine, puis on factorise à la volée :

   $$X^3 + 2X^2 - 10X - 20 = (X + 2)(X^2 + aX - 10),$$

   avec $a + 2 = 2$ (en regardant le terme en X^2) donc $a = 0$.

Exercice 7. Le polynôme caractéristique de $M := \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $\chi_M = X^2 - 5X + 4 = (X-4)(X-1)$.

— Solution 1 : via un polynôme annulateur. Pour calculer M^n, il suffit de faire la division euclidienne de X^n par χ_M. On écrit $X^n = \chi_M Q + a_n X + b_n$. Si k est de caractéristique différente de 3, on trouve a_n et b_n en évaluant en 4 et 1. On obtient :

$$\begin{aligned} 4^n &= 4a_n + b_n \\ 1 &= a_n + b_n \end{aligned}$$

donc $a_n = \frac{4^n-1}{3}$ et $b_n = \frac{4-4^n}{3}$. Si k est de caractéristique 3 (note[1]), on évalue deux fois en 1 mais en ayant pris soin de dériver l'égalité pour la seconde. On trouve alors (pour $n \geq 1$) :

$$\begin{aligned} 1 &= a_n + b_n \\ n &= a_n \end{aligned}$$

donc $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$.

— Solution 2 : via un polynôme interpolateur. Si k est de caractéristique différente de 3, la matrice M est diagonalisable car χ_M est scindé à racines simples. Si $P_n \in k[X]$ envoie 1 sur 1 et 4 sur 4^n, par exemple $P_n = 4^n \frac{X-1}{4-1} + \frac{X-4}{1-4} = \frac{1}{3}\left((4^n-1)X - 4^n + 4\right)$, alors $M^n = P_n(M) = \frac{1}{3}\left((4^n-1)M - (4^n-4)I_2\right)$. Quand k est de caractéristique 3, on a $\chi_M = X^2 + X + 1$ donc χ_M divise $X^3 - 1$ donc $M^3 = I_3$. On en déduit que $M^{3n+a} = M^a$ pour tout $n \geq 0$ et $a \in \{0, 1, 2\}$.

— On peut aussi faire « à main », on fait le cas où k est de caractéristique 3. On a $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut écrire $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ (attention ce ne sont pas les mêmes a_n et b_n qu'avant) et on obtient $M^{n+1} = \begin{pmatrix} -(a_n + c_n) & -(b_n + d_n) \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_n \\ d_{n+1} &= b_n \\ a_{n+1} &= -a_n - c_n = -a_n - a_{n-1} \\ b_{n+1} &= -b_n - d_n = -b_n - b_{n-1} \end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$ (tiens, mais qui est-ce ?) donc 1 est racine double. Ainsi, a_n et b_n sont de la forme $\alpha n + \beta$ et les conditions initiales donnent $a_n = -2n + 1$ et $b_n = -n$.

Exercice 10.

1. On cherche une famille de formes linéaires qui s'annulent en $1, X$ et X^2. On peut utiliser un théorème de représentation (via un produit scalaire), mais ici on connait des formes linéaires. On se trouve qu'à coup de $P \mapsto P^{(k)}(0)$ on va y arriver, en l'occurence $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P'(0)$ et $P \mapsto \frac{1}{2}P''(0)$.
2. Il suffit de montrer l'indépendance, et on l'obtient en évaluant $\sum_i \lambda_i \phi_i$ en $(X-i)(X-j)$.
3. On l'a presque trouvée !

1. La matrice M^n est à coefficients entiers donc on trouvera le même résultat quelque soit la caractéristique, mais il faut alors expliciter les coefficients sous forme entière, ici en factorisant.

2 Groupes

Exercice 16. C'est un groupe abélien donc toute représentation complexe irréductible est de dimension 1 (cf. toute famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent est codiagonalisable). Il s'agit alors de déterminer les morphismes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times$. Ces morphismes sont déterminés par l'image de 1, qui est une racine n-ième de l'unité. Finalement, l'ensemble des représentations irréductibles est paramétré par $\mathbb{U}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (On savait qu'il y en avait n car c'est le nombre de classes de conjugaisons.)

Exercice 17. On utilise d'abord le théorème des restes chinois pour obtenir :

$$G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \left(\mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z}\right)^3.$$

On trie ensuite par facteur premiers puis par puissances croissantes :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} G & \simeq & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \\ & & & & & \times & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z} \end{array}$$

puis avec le théorème chinois on regroupe les facteurs verticalement :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} G & \simeq & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \end{array}$$

d'où :

$$G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/36\mathbb{Z},$$

et on vérifie que les entiers se divisent bien de proche en proche.

3 Anneaux, corps et polynômes

Exercice 21. Il s'agit de trouver un polynôme (unitaire) irréductible de degré 3 sur $\mathbb{F}_2$. Il se trouve que $X^3 + X + 1$ fonctionne (comme il est de degré 3 il est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine). Ainsi, $\mathbb{F}_8 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$. En fait $\mathbb{F}_8^\times$ est d'ordre 7 donc tout élément non trivial génère, mais on va faire le calcul (pour $\mathbb{F}_4$ par exemple ça n'est pas si immédiat). Si x désigne la classe de X alors $x^3 = x + 1$ et $(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{F}_8$ sur $\mathbb{F}_2$. On a $x^4 = x^2 + x$, $x^5 = x^3 + x^2 = x^2 + x + 1$, $x^6 = x^3 + x^2 + x = x^2 + 1$ donc nécessairement $x^7 = 1$ (on vérifie que l'on n'a pas l'air de s'être trompé : $x^7 = x^3 + x = 1$) et x engendre $\mathbb{F}_8^\times$.

Exercice 22. Si k est de caractéristique différente de 2 c'est comme d'habitude (où on distingue les cas selon si Δ a une racine ou non dans k), et sinon c'est facile :)

Exercice 24. On pourrait utiliser l'algorithme d'Euclide étendu (on peut obtenir u et v à l'aide de la même récurrence que les restes, mais avec des termes initiaux différents), mais ici on peut simplement inverser 38 dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. On a $38 = 2 \pmod 9$ donc $4 \cdot 38 = 8 = -1 \pmod 9$ donc avec $v \coloneqq -4$ on a $38v = 1 \pmod 9$. On a $38v - 1 = -38 \cdot 4 - 1 = -152 - 1 = -153 = 3 \cdot (-51) = (3 \cdot 3) \cdot (-17)$ donc avec $u \coloneqq 17$ on a bien $38v - 1 = -9u$.

Exercice 25. Il s'agit de trouver l'image inverse de $(a, b) \coloneqq (1, 2)$ pour l'isomorphisme chinois $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On a $1 = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7$ donc l'image inverse de (a, b) est $3 \cdot 5 \cdot b + (-2) \cdot 7 \cdot a$ donc on trouve ici $x = 15 \cdot 2 - 14 \cdot 1 = 16 \pmod{35}$.

Exercice 26.

1. Un polynôme de degré 3 est irréductible si et seulement s'il ne possède pas de racine (cf. factorisation). Sur $\mathbb{F}_3$ on a $P(0) = 2, P(1) = 5 = 2$ et $P(-1) = -1$ donc P est irréductible. Sur $\mathbb{F}_5$ le calcul précédent montre que 1 est racine donc P est réductible.
2. Sur $\mathbb{C}$ il est réductible, ses racines étant les racines 97ièmes de l'unité (cf. suite géométrique). Sur $\mathbb{R}$ il est réductible, puisque les seuls polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont de degré au plus 2. Sur $\mathbb{Q}$ il est irréductible (c'est un polynôme cyclotomique ; sinon on utilise Eisenstein avec $p = 97$ et $P(X+1)$, plus précisément p divise tous les coefficients sauf le dominant et p^2 ne divise pas le coefficient constant). Sur $\mathbb{Z}$ il est encore irréductible car il est de plus primitif (pgcd des coeffs = 1), c'est le théorème de Gauss.

Exercice 27. On suit l'algorithme. Le degré du monôme le plus grand pour l'ordre lexicographique (c'est X^2) est $a = (2, 0, 0)$ (on a nécessairement $a_1 \geq a_2 \geq a_3$) donc si P est le polynôme de l'énoncé on écrit $P - \sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3}\sigma_3^{a_3}$. On trouve :

$$\begin{aligned} XYZ + X^2 + Y^2 + Z^2 - (X+Y+Z)^2 &= XYZ - 2(XY + XZ + YZ) \\ &= -2\sigma_2 + \sigma_3 \end{aligned}$$

Exercice 28. On a $\frac{X}{(X^2-1)^2(X^2+1)} = \frac{X}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)}$. Sur $\mathbb{C}$, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{X}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)} &= \frac{X}{(X-1)^2(X+1)^2(X-i)(X+i)} \\ &= \frac{a}{X-1} + \frac{a'}{(X-1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{b'}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} \end{aligned}$$

On trouve a', b', c et d en multipliant par le dénominateur associé et en évaluant en la racine associée (on peut remarquer que $c = -d$ par conjugaison et unicité). Pour a et b, soit on se souvient de la formule toute faite à base de dérivée, soit en multipliant par X et en prenant la partie entière (*i.e.* « faire tendre X vers $+\infty$ ») on remarque que $0 = a + b + c + d$ et on conclut en déterminant a en évaluant en évaluant en une autre valeur (par exemple 0, avec laquelle on trouve $0 = -a + a' + b + +b' + ic - id$). Pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{R}$, il suffit de regrouper les deux derniers termes (dans le cas où les racines complexes sont trop compliquées on peut directement écrire la décomposition sur $\mathbb{R}$).

4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

Exercice 29. Soit $M := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible donc elle s'écrit de façon unique $M = OS$ avec $O \in O_2(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. On a $M^\top M = S^2$ donc pour trouver S il suffit de prendre une (la !) racine carrée définie positive de $M^\top M$. Pour cela on peut utiliser un polynôme interpolateur : la matrice $M^\top M$ est symétrique définie positive donc diagonalisable à valeurs propres strictement positives, donc si P envoie ces valeurs propres sur leurs racines positives on peut poser $S := P(M^\top M)$. On a $M^\top M = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ et on trouve que les valeurs propres de $M^\top M$ sont $18 = 3^2 \cdot 2$ et 2. On pose donc

$$P := \sqrt{2}\frac{X - 18}{-16} + 3\sqrt{2}\frac{X-2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{8}X + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\sqrt{2}}{8} M^\top M + \frac{3\sqrt{2}}{4} I_2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \frac{3\sqrt{2}}{4} I_2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

On a $\det S = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$ donc $S^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ puis

$$
\begin{aligned}
O &= M S^{-1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercice 30. On utilise la méthode de Gauss, en « complétant les carrés ». On obtient :

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2y^2 + xy + yz &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} - 2y^2 + yz \\
&= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} y^2 + yz \\
&= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{3}{2} y\right)^2 - yz\right] \\
&= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{3}{2} y - \frac{z}{3}\right)^2 - \left(\frac{z}{3}\right)^2\right] \\
&= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} y - \frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2
\end{aligned}
$$

La forme quadratique est donc non dégénérée, de signature $(2, 1)$. Si q est la forme quadratique correspondante dans la base canonique (e_1, e_2, e_3), la nouvelle base (e'_1, e'_2, e'_3) vérifie

$$
q(v) = x^2 - 2y^2 + xz + yz = x'^2 - y'^2 + z'^2,
$$

si $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, pour trouver les e'_i on doit résoudre

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
x & + & \frac{y}{2} & & & = & x' \\
 & & \frac{3}{2} y & - & \frac{z}{3} & = & y' \\
 & & & & \frac{z}{3} & = & z'
\end{array}
\right. ,
$$

où on aura successivement $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, on doit trouver $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

donc on inverse M !

Exercice 31. Si $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est la matrice de la base, le procédé de Gram–Schmidt consiste à multiplier par une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $MT = \Omega$ est orthogonale. On a donc $M = \Omega T^{-1}$, c'est la décomposition QR.

Exercice 32. Il s'agit de diagonaliser simultanément les deux formes quadratiques : si q est celle du dessus et q_0 du dessous, si q_0 est définie positive alors on peut diagonaliser q dans une base orthonormale pour q_0. La matrice de q_0 dans la base canonique est $Q_0 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, sa trace et son déterminant sont strictement positifs donc elle est bien (symétrique) définie positive. La matrice de q dans la base canonique est $Q := \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ (également symétrique définie positive). On peut trouver une base orthonormale pour Q_0 donc il existe une matrice U inversible (pas nécessairement orthogonale) telle que $UQ_0U^\top = I_2$. La matrice $UQU^\top$ est symétrique donc il existe une matrice V orthogonale et une matrice D diagonale telles que $V(UQU^\top)V^\top = D$. Ainsi, avec $W := VU$ on a

$$\begin{aligned} WQ_0W^\top &= VI_2V^\top = I_2, \\ WQW^\top &= D. \end{aligned}$$

Soit maintenant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a $q(x, y) = X^\top QX$ donc en posant $X := W^\top Y$ on a $q(x, y) = Y^\top WQW^\top Y = Y^\top DY = \lambda z^2 + \mu t^2$ où $D = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ et $Y = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$. De même, on a $q_0(x, y) = X^\top Q_0X = Y^\top WQ_0W^\top Y = Y^\top Y = z^2 + t^2$. Si $X \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{q(x, y)}{q_0(x, y)} &= \frac{\lambda z^2 + \mu t^2}{z^2 + t^2} \\ &\geq \min(\lambda, \mu) \frac{z^2 + t^2}{z^2 + t^2} \\ &\geq \min(\lambda, \mu), \end{aligned}$$

en particulier le minimum existe et est atteint, par exemple pour $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (si $\lambda \leq \mu$) et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (si $\lambda \geq \mu$).

Reste à trouver λ et μ. Pour cela, on remarque que $D = WQW^\top = WQ(Q_0^{-1}W^{-1}) = W(QQ_0^{-1})W^{-1}$ (on a vu que Q_0 est bien inversible !) donc λ et μ sont les valeurs propres de QQ_0^{-1}. On calcule Q_0^{-1} avec la formule de la comatrice :

$$Q_0^{-1} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}Q.$$

Ainsi, on a $QQ_0^{-1} = \frac{4}{3}Q^2$ donc les valeurs propres sont $\frac{4}{3}\nu^2$ où ν est une valeur propre de Q (trigonaliser, ici même diagonaliser). On a $\chi_Q = X^2 - 2X + \frac{3}{4}$ donc $\Delta = 4 - 3 = 1$ et les racines sont $\frac{2\pm 1}{2} = \frac{3}{2}$ ou $\frac{1}{2}$. Le minimum recherché vaut donc $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}$ (et est atteint en $x = y = 1$).

Exercice 33. Le produit de deux symétries axiales est un déplacement (= isométrie affine directe), donc c'est soit une rotation soit une translation. On vérifie que les deux cas peuvent se produire (selon si les axes sont parallèles ou non).

Exercice 34. On commence par orthodiagonaliser la forme quadratique. La matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ donc le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X - 8$ donc le discriminant vaut $2^2 + 4 \cdot 8 = 36 = 6^2$ donc les valeurs propres sont $\frac{2\pm 6}{2} = 4$ et -2. On va obtenir une hyperbole car les signes sont opposés. On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés, donc une matrice de passage orthogonale est $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées dans la nouvelle base, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}
x^2 + 6xy + y^2 + 4x &= 4x'^2 - 2y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}(x' - y') \\
&= 4x'^2 - 2y'^2 + 2\sqrt{2}(x' - y') \\
&= 4\left[x'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'\right] - 2\left[y'^2 + \sqrt{2}y'\right] \\
&= 4\left[\left(x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}\right] - 2\left[\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] \\
&= 4\left(x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0 &\iff 4\left(x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2} \\
&\iff 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\
&\iff \frac{\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

où $a = \frac{1}{2}$ (demi-grand axe) et $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (demi-petit axe). Ainsi, on a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (distance du centre au foyer ; attention, le $+$ devient un $-$ pour les ellipses) et l'exentricité vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Pour représenter la courbe, les axes ont pour équation $x'' = 0$ et $y'' = 0$, et les asymptotes $x'' = y''$ et $x'' = -y''$, où $x'' \coloneqq y' + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y'' \coloneqq x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}$.