Exercices d'applications directes dont le jury attend une réponse nette et précise

Salim Rostam
Complément d'algèbre pour l'agrégation, ENS Rennes

La structure reprend celle du programme. Il n'y a pas de question de cours ; tous les exercices qui suivent doient savoir être faits par réflexe et sans réfléchir (trop longtemps) à la méthode ! Ceux avec :

— deux étoiles sont à savoir faire parfaitement et sans hésitation ;
— une étoile sont des applications directes de notions de cours.

Extrait du rapport du jury 2018 :

> « Le jury apprécie que les candidats soient capables d'appliquer les résultats fondamentaux de leur leçon à des cas simples. Par exemple il est indispensable de savoir
> — justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;
> — effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartement à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathbf{F}_q$, etc.) ;
> — mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, *etc.*). »

1 Algèbre linéaire

1.1 Espaces vectoriels

Exercice 1 (*)**.** Donner des exemples de bases du $\mathbb{F}_{16}$-espace vectoriel $\mathbb{F}_{16}[X, Y]$.

Exercice 2 (*)**.** Déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme σ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donné par $\sigma : (u_n)_{n\geq 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geq 0}$.

Exercice 3 (*)**.** On considère les transpositions $s_1 \coloneqq (1, 2)$ et $s_2 \coloneqq (2, 3)$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. Soit k un corps. On considère l'action de permutation de $\mathfrak{S}_3$ sur k^3 et on considères les vecteurs $e_1 \coloneqq (-1, 0, 1)^\top$ et $e_2 \coloneqq (1, -1, 0)^\top$ de k^3.

1. Montrer que (e_1, e_2) est k-libre.
2. En déduire que l'application
$$s_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad s_2 \mapsto -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
s'étend en un unique morphisme de groupes $\mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}_2(k)$.
3. La représentation ainsi définie est-elle irréductible ?

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 4 (**)**.** Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)**.** Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de matrice dans la base canonique $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Donner la matrice de u dans la base $(e_1 + e_2, e_1 + e_3, 2e_2 - e_3)$.

Exercice 6 (**)**.** Soit k un corps.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(k)$.
2. Même question avec $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_3(k)$
3. Trouver les valeurs propres des matrices précédentes lorsque $k = \mathbb{R}$
4. Les matrices précédentes sont-elles diagonalisables (sur $\mathbb{R}$) ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

Exercice 7. Soit k un corps. Calculer $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^n$ pour $n \geq 0$.

Exercice 8 (**)**.** Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \in \mathbb{F}_5$.

Exercice 9 (**)**.** Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{Q})$.

Exercice 10 (*)**.**

1. Quelle est la base duale de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$? (Écrite sous la forme $P \mapsto ....$)

Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, on considère la forme linéaire $\phi_i : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi_i(P) \coloneqq P(i)$.

2. Montrer que (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]^*$.
3. Déterminer sa base anté-duale.

2 Groupes

Exercice 11 (**)**.** Donner la décomposition en cycles, la signature et une décomposition comme produit de transpositions de $(1, 2, 5)(6, 1, 2)(3, 4)(1, 4, 5, 2) \in \mathfrak{S}_7$.

Exercice 12. Montrer que les permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_6$.

Exercice 13. Combien de classes de conjugaison y a-t-il dans $\mathfrak{S}_4$? Les exhiber.

Exercice 14. Le groupe $\mathfrak{A}_n$ est-il simple si $n \in \{1, \ldots, 4\}$?

Exercice 15. Quelles sont les caractères complexes de dimension 1 du groupe symétrique ?

Exercice 16 (*)**.** Lister les représentations complexes irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 17 (*)**.** Écrire sous forme canonique le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^3$.

3 Anneaux, corps et polynômes

Exercice 18. Déterminer un élément primitif de $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

Exercice 19 (*)**.** Donner la dimension des extensions $\mathbb{Q}(j, \sqrt{7})/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3})/\mathbb{Q}$.

Exercice 20. Donner deux corps non isomorphes de caractéristique nulle algébriquement clos.

Exercice 21. Décrire $\mathbb{F}_8$ et donner un générateur du groupe multiplicatif.

Exercice 22 (**)**.** Soit k un corps. Résoudre l'équation $2x^2 - x + 3 = 0$ pour $x \in k$.

Exercice 23. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $3x^3 - 8x^2 + x + 2 = 0$.

Exercice 24 (**)**.** Trouver deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $9u + 38v = 1$.

Exercice 25 (**)**.** Résoudre $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$

Exercice 26 (*)**.**

1. Le polynôme $X^3 + 2X + 2$ est-il irréductible sur $\mathbb{F}_3$? Sur $\mathbb{F}_5$?
2. Le polynôme $X^{96} + X^{95} + \cdots + X + 1$ est-il irréductible sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{Q}$? Sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 27 (*)**.** Écrire le polynôme symétrique $XYZ + X^2 + Y^2 + Z^2 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ comme un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 28 (*)**.** Décomposer en éléments simples la fraction rationelle $\frac{X}{(X^2-1)^2(X^2+1)} \in \mathbb{C}(X)$. Même question sur $\mathbb{R}(X)$.

4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

Exercice 29. Donner la décomposition polaire de $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 30 (*)**.** Déterminer la signature de la forme quadratique donnée par $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 + xy + yz$. Préciser la matrice de passage.

Exercice 31 (*)**.** On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Orthonormaliser la base $(2e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 - 3e_2)$. Interprétation matricielle ?

Exercice 32. Calculer $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

5 Géométries affine et euclidienne

Exercice 33 (*)**.** Que dire du produit de deux symétries axiales du plan ?

Exercice 34 (*)**.** Donner les éléments caractéristiques et représenter la courbe d'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$.