Coniques

Salim Rostam
Complément d'algèbre pour l'agrégation, ENS Rennes

Référence : Mercier, *Cours de géométrie*, Chapitres 20, 21, 22. Voir aussi Audin, *Géométrie* (§VII). On travaille dans le plan euclidien $\mathcal{P}$.

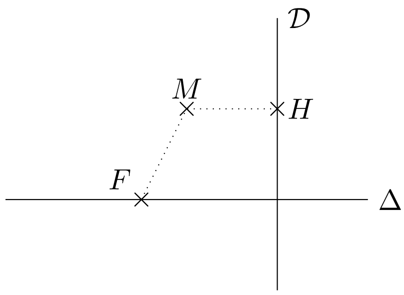
1 Définition par foyer et directrice

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $F \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$.

Définition 1.1. Soit $e \in \mathbb{R}_+^*$. La *conique de foyer* F*, de directrice* $\mathcal{D}$ *et d'excentricité* e est l'ensemble $\mathcal{C}_e$ des points M du plan tels que

$$MF = eMH,$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.



Dans la suite $\mathcal{C}_e$ désignera toujours la conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité $e > 0$. Si $e < 1$ (resp. $e = 1$ et $e > 1$) on dit que la conique $\mathcal{C}_e$ est une ellipse (resp. parabole et hyperbole).

Remarque 1.2.
- Ainsi, une parabole est une sorte de médiatrice entre un point et une droite.
- Puisque $F \notin \Delta$, son projeté orthogonal H vérifie $FH \neq 0$ donc $F \notin \mathcal{C}_e$.

Définition 1.3. Si $\mathcal{C}$ est une conique, l'*axe focal* est la droite Δ passant par F et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Proposition 1.4. *L'axe focal est un axe de symétrie de* $\mathcal{C}$.

Démonstration. Si $M \in \mathcal{C}_e$, on veut montrer que son symétrique M' par rapport à Δ reste dans $\mathcal{C}_e$. Le symétrique H' de H par rapport à Δ est le projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$. De plus $F \in \Delta$ est fixe par cette symétrie donc puisqu'une symétrie orthogonale est une isométrie on a $MF = M'F$ et $MH = M'H'$ donc $M'F = eM'H'$ donc $M' \in \mathcal{C}_e$. $\square$

Soit K le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ.

Proposition 1.5. *L'intersection* $\mathcal{C}_e \cap \Delta$ *est donnée par :*
- *le milieu de* $[FK]$ *si* $e = 1$ *;*
- *l'ensemble* $\{A, A'\}$ *où* A *(resp.* A'*) est le barycentre de* $F(1)$ *et* $K(e)$ *(resp.* $K(-e)$*).*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C}_e \cap \Delta &\iff MF = eMK \text{ et } M \in \Delta\\
&\iff M \in \Delta \text{ et } \overline{MF} = \pm e\overline{MK}\\
&\iff M \in \Delta \text{ et } \big(\overline{MF} + e\overline{MK} = 0 \text{ ou } \overline{MF} - e\overline{MK} = 0\big).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $e = 1$ alors la seule solution est le milieu I de $[FK]$ (on a $\overline{MF} - \overline{MK} = \overline{KF} \neq 0$ puisque $F \notin \mathcal{D}$, et on a bien $\overline{MI} = \overline{IF}$), et sinon les deux solutions A, A' sont celles de l'énoncé. □

Corollaire 1.6 (Construction d'une parabole à la règle et au compas)**.** *Soit $F \notin \mathcal{D}$ et soit $\mathcal{C}_1$ la parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Étant donné $H \in \mathcal{D}$, il existe un unique point $M \in \mathcal{C}_1$ de projeté orthogonal H, et ce point est donné par l'intersection de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par H avec la médiatrice de $[FH]$.*

Démonstration. Si un tel point existe alors il est bien sur la parabole puisque $MF = MH$, et de projeté orthogonal H. Pour prouver l'existence, soit Δ_H la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par H et d la médiatrice de $[FH]$. Tout d'abord, on a $H \neq F$ puisque $H \in \mathcal{D} \not\ni F$, donc $\Delta_H \neq d$ puisque $d \ni H \in \Delta_H$. Il reste donc à montrer que Δ_H et d ne sont pas parallèles ; si c'est le cas alors d est parallèle à l'axe focal Δ, donc (HF) est parallèle à $\mathcal{D} \ni H$ donc $(HF) = \mathcal{D}$ ce qui est impossible puisque $F \notin \mathcal{D}$. □

2 Équations cartésiennes

2.1 Cas $e \neq 1$

On désigne par O le milieu de $[AA']$ et on se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ d'origine O et de premier vecteur $\frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$. On pose :

$$\begin{aligned}
a &\coloneqq \overline{OA} = OA,\\
c &\coloneqq \overline{OF} = OF,\\
d &\coloneqq \overline{OK} = OK.
\end{aligned}$$

Par les propriétés de barycentre de A et A' on a :

$$\begin{cases}
\overline{OF} + e\overline{OK} = (1+e)\overline{OA},\\
\overline{OF} - e\overline{OK} = (1-e)\overline{OA'} = (e-1)\overline{OA},
\end{cases}$$

donc par somme et différence on obtient $c = ea$ et $ed = a$, ce qui se réécrit :

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad d = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}, \tag{†}$$

en particulier on retrouve bien $e \neq 1$ puisque $a \neq c$ (on a vu $A \in \mathcal{C}_e$ et $F \notin \mathcal{C}_e$ donc $A \neq F$).

Remarque 2.1. On a $e = \frac{c}{a} = \frac{a}{d}$ donc $\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OK}}$. Ainsi, le point K (et donc la directrice $\mathcal{D}$) peut être retrouvé en traçant une droite $\mathcal{L}$ passant par O (quelconque) et deux droites parallèles passant par F et A coupant $\mathcal{L}$ en $\tilde{F}$ et $\tilde{A}$: on a alors $\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{O\tilde{F}}}{\overline{O\tilde{A}}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OK}}$ donc le point K est à l'intersection de Δ et de la parallèle à $(\tilde{F}A)$ passant par $\tilde{A}$. C'est utile par exemple en GeoGebra puisque les coniques sont tracées sans directrice (mais avec la définition bifocale, cf. Section 3).

Proposition 2.2. *On rappelle que $e \neq 1$. Une équation cartésienne de $\mathcal{C}_e$ est :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Démonstration. Si $M = (x, y)$, sa projection sur $\mathcal{D}$ a pour coordonnées (d, y) donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_e &\iff MF^2 = e^2 MH^2 \\ &\iff (x-c)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2 \\ &\iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x^2 - 2\frac{a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2}\right) \\ &\iff \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.3. *L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_e)$. En particulier, la conique $(\mathcal{C}_e)$ est également définie par le foyer F', la directrice $\mathcal{D}'$ et l'excentricité e où F' (resp. $\mathcal{D}'$) est le symétrique de F (resp. $\mathcal{D}$) par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*

2.1.1 Cas $e < 1$

Par (†) on a $c < a$ et en posant $b := \sqrt{a^2 - c^2}$ l'équation de la Proposition 2.2 devient :

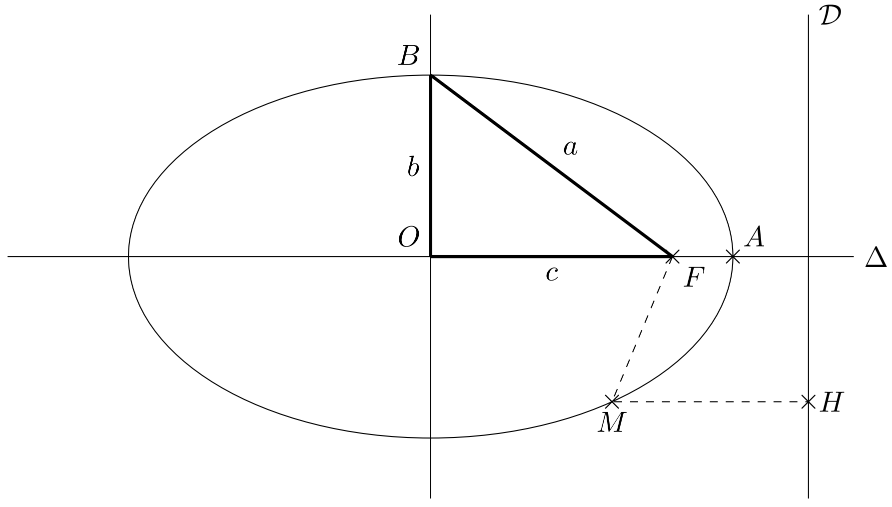
$$(\mathcal{C}_e) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

qui est donc l'équation générale d'une ellipse (ou d'un cercle). Réciproquement, si $a \neq b$ alors on voit en remontant les calculs que cette équation définit bien l'ellipse de foyer $F(c, 0)$, de directrice $\mathcal{D}(x = d)$ et d'excentricité e (avec c et d donnés par (†)).

Définition 2.4. Le réel a est appelé le *demi-grand axe* de l'ellipse $\mathcal{C}_e$, et b est le *demi-petit axe.*

Remarque 2.5. Si $a = b$ alors l'équation est celle du cercle de centre O et de rayon a, mais alors $c = 0$ (donc $F = O$) et donc $e = 0$ et $d = \infty$ par (†) ; la directrice est « à l'infini ». Dans notre terminologie, un cercle n'est donc pas une ellipse. Cependant, on élargira la définition de conique pour englober le cas des cercles.

On remarque que le point B de coordonnées $(0, b)$ dans $\mathcal{R}$ est sur l'ellipse. De plus, par le théorème de Pythagore on a $BF = a$ (on peut aussi dire que si H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ alors par (†) on a $BF = eBH = ed = a$).



Corollaire 2.6. *L'aire d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b est πab.*

Démonstration. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire donnée par $f(x, y) = (ax, by)$, alors par l'équation cartésienne on voit que f envoie le cercle unité sur l'ellipse en question. Le cercle étant d'aire π et $\det f = ab$, on obtient le résultat énoncé. □

Remarque 2.7. La manipulation précédente ne fonctionne plus pour le périmètre d'une ellipse. Pour le calculer, on peut utiliser l'équation cartésienne qui donne le paramétrage (bijectif) suivant :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = b\sin t, \end{cases}$$

pour $t \in [0, 2\pi[$. Ainsi, on a $x'(t) = -a\sin t$ et $y'(t) = b\cos t$ donc le périmètre vaut :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}dt.$$

En général, cette intégrale ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles ; elle fait partie de la famille des *intégrales elliptiques*.

2.1.2 Cas $e > 1$

Par (†) on a $c > a$ et en posant $b := \sqrt{c^2 - a^2}$ l'équation de la Proposition 2.2 devient :

$$(\mathcal{C}_e) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

qui est donc l'équation générale d'une hyperbole (même si $a = b$ cette fois !). Si comme dans la Remarque 2.7 on veut donner un paramétrage, il sera cette fois $x(t) = \pm a\cosh(t)$ et $y(t) = b\sinh(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.8. *Les droites $y = \pm\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à l'hyperbole $(\mathcal{C}_e)$.*

Démonstration. On a vu que les axes du repères $\mathcal{R}$ sont des axes de symétries, donc il suffit de voir ce qui se passe dans le quadrant principal. L'équation y devient :

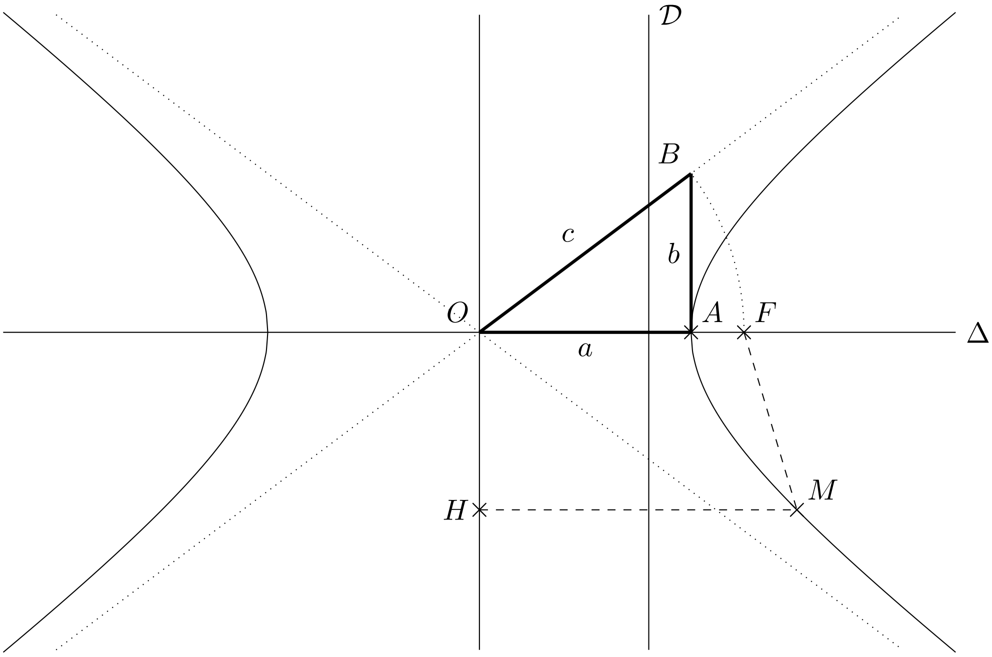
$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad \text{pour } x > a,$$

donc pour $x \gg a$ on a :

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \\ &= \frac{b}{a}x\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + o(x^{-2})\right) \\ &= \frac{b}{a}x - o(x^{-1}). \end{aligned}$$

□

On remarque que le point B de coordonnées (a, b) est sur une des asymptotes. Le théorème de Pythagore et la relation $b^2 = c^2 - a^2$ montrent que $OB^2 = c^2$.



2.2 Cas $e = 1$

Rappelons que la Proposition 1.5 permet d'affirmer que $\mathcal{C}_1 \cap \Delta$ est le milieu de $[FK]$. Soit O ce milieu ; on se place dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$ d'origine O de premier axe Δ orienté de K vers F. Soit c tel que $F(c, 0)$ et ainsi $K(-c, 0)$.

Proposition 2.9. *Une équation cartésienne de $\mathcal{C}_1$ est :*

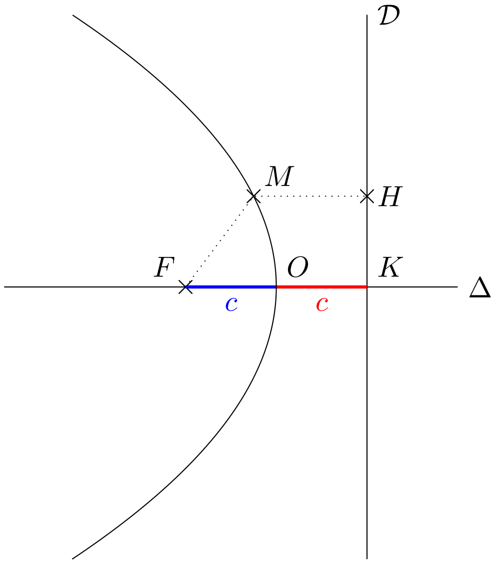
$$y^2 = 2px,$$

ou $p \coloneqq 2c = FK = d(F, \Delta)$ est la distance du foyer à la directrice.

Démonstration. Si $M(x, y)$ alors $H(-c, y)$ donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_1 &\iff MF^2 = MH^2 \\ &\iff (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 \\ &\iff y^2 = 4cx. \end{aligned}$$

□



2.3 Un même cas ?

On considère l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ d'un cône $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ (c'est bien un cône : on a une symétrie de révolution par rapport à l'axe de cotes, et à $y = 0$ par exemple on a $|x| = |z|$). L'équation étant homogène, on peut la considérer dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, le *plan projectif*. C'est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire, l'ensemble des coordonnées $[x : y : z]$ avec $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ et $[\lambda x : \lambda y : \lambda z] = [x : y : z]$ pour $\lambda \neq 0$ (les quantités $[x : y : z]$ sont exactement l'ensemble des droites, via un vecteur directeur). En particulier, en distinguant selon si z est nul ou non, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) &= \{[x : y : z] : z \neq 0\} \sqcup \{[x : y : 0] : (x, y) \neq (0, 0)\}\\ &= \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

où $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est la « droite à l'infini ». Cette droite à l'infini est l'ensemble des directions possibles pour les droites de $\mathbb{R}^2$, où deux droites de $\mathbb{R}^2$ s'intersectent dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ssi elles sont parallèles.

En revenant aux coniques, on peut se dire qu'une hyperbole est en fait dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la même chose qu'une ellipse, puisque sur les branches qui vont à l'infini on va « revenir » sur l'autre branche et au final ça fera comme si on était sur une ellipse. De même, on va pouvoir passer d'une branche infinie de la parabole à une autre en passant par un morceau de la droite à l'infini. On va détailler ce point de vue en montrant que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = \{[x : y : z] : (x, y, z) \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ peut être vu comme un cercle, une hyperbole, ou une parabole selon les coordonnées choisies (*i.e.* selon le point de vue choisi).

Si on considère les points où $z \neq 0$, alors l'ensemble des $[x : y : z]$ dans $\mathcal{C}$ est celui des $[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1]$, qui vérifie $X^2 + Y^2 = 1$ avec $X := \frac{x}{z}$ et $Y := \frac{y}{z}$. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition 2.10. *La partie $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \cap \{z \neq 0\}$ du plan (usuel) est un cercle.*

En considérant maintenant l'ensemble des points où $y \neq 0$, alors l'ensemble des points $[x : y : z]$ dans $\mathcal{C}$ est celui des $[\frac{x}{y} : 1 : \frac{z}{y}]$ qui vérifient $X'^2 - Z'^2 = 1$, où $X' := \frac{x}{y}$ et $Z' := \frac{z}{y}$. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition 2.11. *La partie $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \cap \{y \neq 0\}$ du plan (usuel) est une hyperbole.*

Finalement, les points de $\mathcal{C}$ vérifient $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$ donc $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \cap \{y \neq z\}$ est l'ensemble des $[\frac{x}{z-y} : \frac{y}{z-y} : \frac{z}{z-y}]$ qui vérifient $X''^2 = Y''$ avec $X'' := \frac{x}{z-y}$ et $Y'' := \frac{y}{z-y} \cdot \frac{z}{z-y}$. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition 2.12. *La partie $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \cap \{y \neq z\}$ du plan (usuel) est une parabole.*

Remarquons que c'est du cône que provient la terminologie « conique » : en regardant l'intersection avec un plan qui ne contient pas l'axe des cotes, on a essentiellement montré que l'on obtient... une conique (ou un cercle).

2.4 Exemple

On se propose de reconnaitre et d'identifier les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0.$$

On réduit tout d'abord la partie quadratique, via un changement orthonormal pour conserver les distances. La matrice de la forme quadratique associée est $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on a $\chi_A = T^2 - 2X - 8 = (T+2)(T-4)$; les valeurs propres ayant un signe opposé on aura une hyperbole. On remarque que $(1,1)^\top$ est vecteur propre pour la valeur propre 4, et pour la valeur propre -2 on cherche un vecteur orthogonal donc on prend $(1,-1)^\top$. Ainsi, avec $P := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ on a[1] $P^\top AP = \operatorname{diag}(4, -2)$. Avec $(x,y)^\top = P(x',y')^\top$, on a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$ et l'équation de $\mathcal{C}$ devient :

$$4x'^2 - 2y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}(x'+y') = 0 \iff 4\left[\left(x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}\right] - 2\left[\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = 0.$$

Ainsi, translatant la base de la façon suivante (les translations sont bien des isométries) :

$$x'' := x' + \frac{1}{2\sqrt{2}},$$
$$y'' := y' - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

l'équation de $\mathcal{C}$ devient :

$$4x''^2 - 2y''^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \iff 4y''^2 - 8x''^2 = 1$$
$$\iff \left(\frac{y''}{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(\frac{x''}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2 = 1.$$

Ainsi, l'hyperbole est de paramètres :

$$a = \frac{1}{2},$$
$$b = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$
$$d = \frac{a^2}{c} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

1. Si P est la matrice de la nouvelle base dans l'ancienne, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$ donc $Y = MX$ devient $PY' = MPX'$ donc $M' = P^{-1}MP$.

le foyer F est de coordonnées $(c, 0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ dans la base (y'', x''), la directrice $\mathcal{D}$ est d'équation $y'' = d = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et les asymptotes $x'' = \pm\frac{b}{a}y'' = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}y''$. Puisque :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= P \left[\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x''+y'' \\ x''-y'' \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

on obtient que, le centre O (de coordonnées $(0, 0)$ dans (y'', x'')) est, dans la base (x, y), de coordonnées $\frac{1}{4}(1, -3)^\top$, les axes (d'équations $x'' = 0$ et $y'' = 0$) sont d'équations :

$$x + y = -\frac{1}{2} \iff y = -x - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x - y = 1 \iff y = x - 1,$$

le foyer F est de coordonnées :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

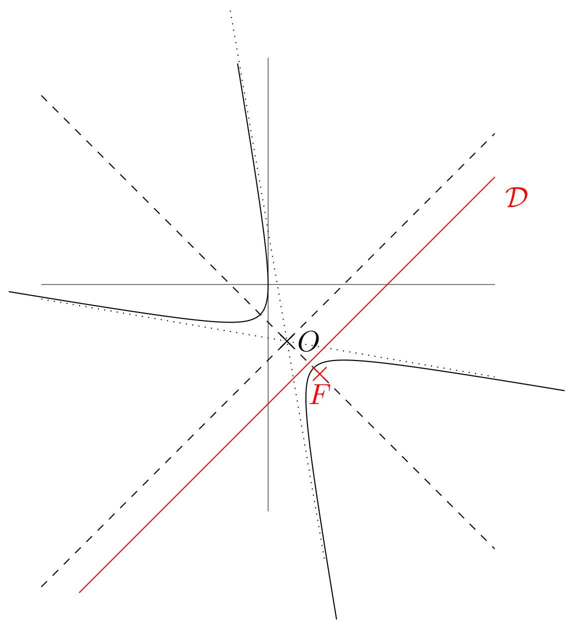
la directrice $\mathcal{D}$ est d'équation :

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{1}{\sqrt{6}} &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \\
&\iff x - y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\iff y = x - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

et les asymptotes sont d'équations :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)+\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\iff \sqrt{2}(x+y)+\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm(x-y-1)\\
&\iff \begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\frac{1}{\sqrt{2}} = x-y-1\\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\frac{1}{\sqrt{2}} = -x+y+1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y = -1-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ (\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\left((-\sqrt{2}+1)x-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(-(\sqrt{2}+1)x+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{cases}
\end{aligned}$$

(simplifiable).



3 Définition bifocale

On suppose $e \neq 1$. On a vu dans le Corollaire 2.3 que, dans le repère du §2.1, le symétrique $F'(-c,0)$ du foyer $F(c,0)$ par rapport à l'axe des ordonnées est un autre foyer de $\mathcal{C}_e$. La donnée du paramètre a et de ces deux foyers suffit en fait à caractériser entièrement $\mathcal{C}_e$.

Proposition 3.1. *On suppose $e < 1$. L'ellipse $\mathcal{C}_e$ est l'ensemble $\mathcal{C}_{a,c}^{bif}$ des points M tels que :*

$$MF + MF' = 2a.$$

Réciproquement, si $a, c > 0$ alors :

- *si $a < c$ alors $\mathcal{C}_{a,c}^{bif} = \emptyset$;*
- *si $a = c$ alors $\mathcal{C}_{a,c}^{bif} = [FF']$;*
- *si $a > c$ alors $\mathcal{C}_{a,c}^{bif}$ est l'ellipse $\mathcal{C}_e$ avec les paramètres attendus.*

Démonstration. On montre d'abord la réciproque. Si $\mathcal{C}_{a,c}^{\mathrm{bif}}$ n'est pas vide alors il contient un point M donc par l'inégalité triangulaire on obtient $2c = FF' \leq FM + MF' = 2a$ donc $c \leq a$. Si $c = a$, par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire on sait que $M \in \mathcal{C}_{a,a}^{\text{bif}} \iff$ les vecteurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{MF'}$ sont positivement colinéaires $\iff M \in [FF']$.

On suppose donc dans la suite que $c < a$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{a,c}^{\text{bif}} &\iff MF + MF' = 2a \\ &\iff MF^2 + MF'^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2 \\ &\iff (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2 \\ &\iff x^2 + y^2 + c^2 + MF \cdot MF' = 2a^2 \\ &\iff MF \cdot MF' = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{a,c}^{\text{bif}} &\implies \left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right] = \left(2a^2 - x^2 - y^2 - c^2\right)^2, \\ &\iff \left(x^2 + y^2 + c^2 - 2xc\right)\left(x^2 + y^2 + c^2 + 2xc\right) = \left(2a^2 - x^2 - y^2 - c^2\right)^2 \\ &\iff \left(x^2 + y^2 + c^2\right)^2 - 4x^2c^2 = 4a^4 + \left(x^2 + y^2 + c^2\right)^2 - 4a^2\left(x^2 + y^2 + c^2\right) \\ &\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \end{aligned}$$

ce qui, d'après §2.1.1, est bien l'équation cartésienne d'une ellipse (avec le bon foyer et la bonne directrice).

Si maintenant $\mathcal{C}_e$ est une ellipse, on peut remonter les calculs en justifiant que $2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0$ si $M(x, y) \in \mathcal{C}_e$. Mais c'est le cas puisque d'après l'équation cartésienne on a $a^2 \geq x^2$ et $a^2 - c^2 \geq y^2$. □

Une application de la caractérisation bifocale des ellipses est la construction d'un parterre de fleurs elliptique : on plante deux piquets que l'on relie avec une corde trop longue, et les points obtenus en tendant la corde forment une ellipse.

Proposition 3.2. *On suppose $e > 1$. L'hyperbole $\mathcal{C}_e$ est l'ensemble $\mathcal{C}_{a,c}^{bif}$ des points M tels que :*

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Réciproquement, si $a, c > 0$ alors :

- *si $a > c$ alors $\mathcal{C}_{a,c}^{bif} = \emptyset$;*
- *si $a = c$ alors $\mathcal{C}_{a,c}^{bif} = (FF') \setminus]FF'[$ est une réunion de deux demi-droites ;*
- *si $a < c$ alors $\mathcal{C}_{a,c}^{bif}$ est l'hyperbole $\mathcal{C}_e$ avec les paramètres attendus.*

Démonstration. On montre d'abord la réciproque. Si $\mathcal{C}_{a,c}^{\text{bif}}$ n'est pas vide alors il contient un point M donc par l'inégalité triangulaire on a :

$$|MF - MF'| = \left|\left\|\overrightarrow{MF}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF'}\right\|\right| \leq \|\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MF'}\| = FF',$$

donc $a \leq c$. Si $a = c$ alors par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire on a $M \in \mathcal{C}_{a,c}^{\text{bif}} \iff$ les vecteurs $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MF'}$ sont positivement colinéaires donc $M \in (FF')$ et $M \notin]FF'[$.

On suppose donc dans la suite que $a < c$. Le même calcul que précédemment donne :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{a,c}^{\text{bif}} &\iff |MF - MF'| = 2a \\ &\iff -MF \cdot MF' = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \\ &\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1, \end{aligned}$$

et on peut remonter si $x^2+y^2+c^2-2a^2 \geq 0$ pour $(x,y) \in \mathcal{C}_e$. C'est le cas puisque d'après l'équation cartésienne, en rappelant que $c > a$ on a $x^2 \geq a^2$ et $y^2+c^2 \geq c^2 \geq a^2$ donc $x^2+y^2+c^2 \geq 2a^2$. $\square$

4 Équation polaire

On se place dans le repère orthonormal direct $\mathcal{R}$ d'origine F et de premier axe l'axe focal Δ, dirigé de F vers la directrice $\mathcal{D}$. On note $h := d(F,\mathcal{D}) = FK$ la distance du foyer à la directrice.

Proposition 4.1. *Pour tout $e > 0$, une équation polaire de la conique $\mathcal{C}_e$ est :*

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta},$$

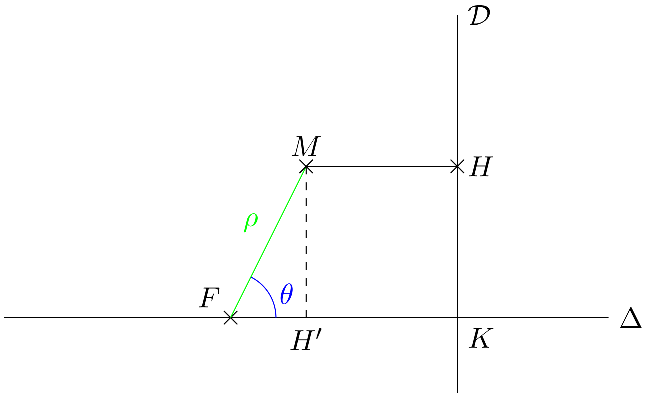
où $p := eh$ est le paramètre *de la conique $\mathcal{C}_e$.*

Remarquons que si $e = 1$ alors la définition de paramètre p coïncide avec celle du §2.2, puisqu'alors $p = h = FK = FO + OK = c + c = 2c$.

Démonstration. Avec H' le projeté orthogonal de $M(\rho,\theta)$ sur Δ, on a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_e &\iff MF^2 = e^2 MH^2 \\ &\iff MF^2 = e^2 H'K^2 \\ &\iff \rho^2 = e^2\left(h - \overline{FH'}\right)^2 \\ &\iff \rho^2 = e^2(h-\rho\cos\theta)^2 \\ &\iff \rho = \pm e(h-\rho\cos\theta) \\ &\iff (1 \pm e\cos\theta)\rho = \pm p \\ &\iff \rho = \frac{\pm p}{1 \pm e\cos\theta} \end{aligned}$$

(puisque $p \neq 0$ on a $1 \pm e\cos\theta \neq 0$).



Si $\mathcal{C}^\pm$ désigne l'ensemble des $M^\pm(\rho,\theta)$ tels que $\rho^\pm(\theta) = \frac{\pm p}{1 \pm e\cos\theta}$, alors $M^-(\theta+\pi) = M^+(\theta)$ puisque :

$$\begin{aligned} \rho^-(\theta+\pi) &= \frac{-p}{1-e\cos(\theta+\pi)} \\ &= \frac{-p}{1+e\cos\theta} \\ &= -\frac{p}{1+e\cos\theta} \\ &= -\rho^+(\theta). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathcal{C}^- = \mathcal{C}^+$ et ainsi $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}^+$. $\square$

Une application de cette équation polaire est les lois de Kepler sur le mouvement des planètes : dans les coordonnées polaires avec le Soleil comme base, on montre via les lois de Newton que les objets célestes décrivent des coniques avec le Soleil comme foyer (ellipses pour les planètes, hyperboles ou paraboles pour les astéroïdes par exemple).

5 Tangentes

On sait qu'une conique possède une tangente en tout point, par exemple par la paramétrisation $\mathcal{C}^1$ évoquée. On a le résultat classique suivant.

Proposition 5.1 (Règle du dédoublement)**.** *La tangente en un point (x_0, y_0) à la conique d'équation :*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

a pour équation :

$$ax_0x + b\frac{y_0x + x_0y}{2} + cy_0y + d\frac{x + x_0}{2} + e\frac{y + y_0}{2} + f = 0.$$

Démonstration. Soit f le polynôme de l'équation de la conique. Par le théorème des fonctions implicites, on sait que la tangente a pour équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

(en d'autres termes, le gradient est un vecteur normal à la tangente). On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2ax + by + d,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2cy + bx + e,\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0\\ \iff\ &(2ax_0 + by_0 + d)(x - x_0) + (2cy_0 + bx_0 + e)(y - y_0) = 0,\end{aligned}$$

donc on a déjà tous les termes en x et y de l'équation recherchée. Puisque $f(x_0, y_0) = 0$ on a :

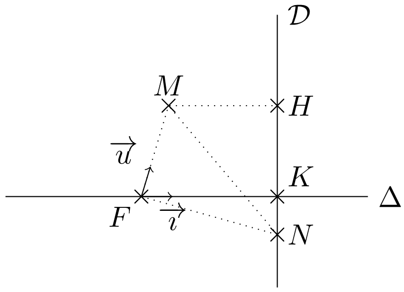
$$\begin{aligned}(2ax_0 + by_0 + d)x_0 + (2cy_0 + bx_0 + e)y_0 &= 2ax_0^2 + 2bx_0y_0 + 2cy_0^2 + dx_0 + ey_0\\ &= -dx_0 - ey_0 - 2f,\end{aligned}$$

donc on trouve bien le terme constant recherché. $\square$

Le résultat suivant donne une méthode géométrique de construction.

Théorème 5.2. *Soit $M \in \mathcal{C}_e \setminus \Delta$. La tangente à $\mathcal{C}_e$ en M coupe la directrice $\mathcal{D}$ en un point N tel que le triangle MFN soit rectangle en F.*

Démonstration. Soit $\overrightarrow{u} \coloneqq \frac{1}{FM}\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{\imath} \coloneqq \frac{1}{FK}\overrightarrow{FK}$. On suppose que $M \in \mathcal{C}_e$ est inclus dans le demi-plan de frontière $\mathcal{D}$ contenant F.



On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0 &\iff \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{FN}=0\\ &\iff \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0\\ &\iff FM+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0.\end{aligned}$$

On voudrait donc montrer que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{MN}=-eMH$, donc on voudrait montrer que :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{MN}=-e\overrightarrow{\imath}\cdot\overrightarrow{MN}.$$

Par définition du vecteur tangent, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}$ sont colinéaires (où $M=M(t)$ est par exemple décrit par une paramétrisation de $\mathcal{C}_e$) donc il suffit de montrer que :

$$\overrightarrow{u}\cdot\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}=-e\overrightarrow{\imath}\cdot\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}.$$

On a $MF=\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{u}$ et $MH=\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{\imath}$. En dérivant la relation $MF=eMH$ on obtient, en remarquant que $\overrightarrow{\imath}$ est constant :

$$\frac{dMF}{dt}=e\frac{dMH}{dt}\iff\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{FM}\cdot\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}=e\frac{d\overrightarrow{MF}}{dt}\cdot\overrightarrow{\imath}+e\frac{d\overrightarrow{FH}}{dt}\cdot\overrightarrow{\imath}.$$

Puisque $\overrightarrow{u}$ est normé, on en déduit que $\overrightarrow{u}\cdot\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}=0$ donc $\overrightarrow{FM}\cdot\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}=0$ puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont colinéaires. De plus, la quantité $\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{\imath}=FK$ est constante donc $\frac{d\overrightarrow{FH}}{dt}\cdot\overrightarrow{\imath}=0$. On obtient alors :

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}\cdot\overrightarrow{u}=-e\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}\cdot\overrightarrow{\imath},$$

et c'est ce qu'on voulait. □

Remarque 5.3. Par symétrie, on sait que si $M\in\mathcal{C}_e\cap\Delta$ alors la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$.

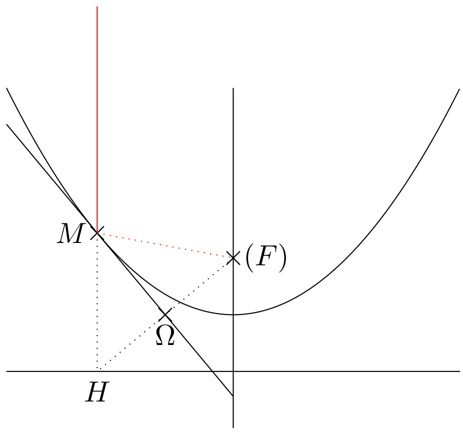
Corollaire 5.4 (Tangentes à une parabole)**.** *On suppose $e=1$. La tangente à un point $M\in\mathcal{C}_1$ de la parabole est donnée par la médiatrice de $[FH]$.*

Démonstration. On a $e=1$ donc $MF=MH$ donc M est sur la médiatrice de $[FH]$. De plus, par définition le triangle MHN est rectangle en H. Par le théorème, le triangle MFN est également rectangle, en F. De plus, puisque les triangles rectangles MHN et MFN ont le côté $[MN]$ en commun on en déduit (par exemple par Pythagore) que $NF=NH$. Le point N est donc également sur la médiatrice de $[FH]$ donc on en déduit que cette médiatrice coïncide avec (MN) (puisque $M\notin\mathcal{D}$ puisque $F\notin\mathcal{D}$). □

Ainsi, la construction à la règle et au compas d'une parabole du Corollaire 1.6 construit simultanément les points et leurs tangentes.

Corollaire 5.5 (Concentration des rayons)**.** *Un rayon lumineux qui arrive parallèlement à l'axe focal d'une parabole se réfléchit en passant par le foyer (et ressort parallèlement à l'axe focal).*

Démonstration. On rappelle qu'un rayon se réfléchit avec un angle opposé à la normale par rapport à l'angle entrant. Soit Ω le milieu de $[FH]$, de sorte que la tangente en M est exactement $(M\Omega)$ par le Théorème.



Soit α l'angle que possède le rayon entrant avec la tangente. Puisque le rayon arrive parallèlement à l'axe focal, son prolongement passe par H donc $\widehat{HM\Omega} = \alpha$. Par le théorème on a également $\widehat{FM\Omega} = \alpha$ donc on déduit que le rayon ressort selon (FM) donc passe par F. $\square$

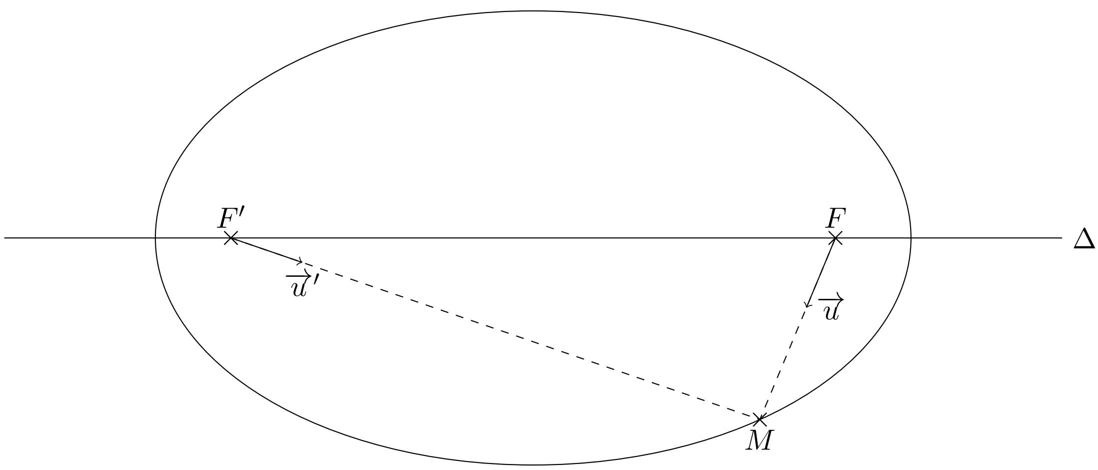
Ce phénomène de concentration a de nombreuses applications, par exemple : antennes satellites, fours solaires, phares, télescopes. Dans la section suivante, on va donner une interprétation de ce résultat quand la conique possède un autre foyer (où « provenir de l'infini » deviendra « provenir de l'autre foyer »).

5.1 Cas des coniques à centre

On va donner une autre caractérisation des tangentes pour les ellipses et hyperboles. Pour cela, on va utiliser leurs caractérisations bifocales. On rappelle que la bissectrice extérieure issue d'un point est la perpendiculaire à la bissectrice (intérieure) issue de ce point.

Proposition 5.6 (Tangentes à une ellipse)**.** *On suppose $e < 1$. La tangente à un point $M \in \mathcal{C}_e$ de l'ellipse est la bissectrice extérieure issue de M du triangle MFF'.*

Démonstration. On pose $\overrightarrow{u} := \frac{1}{FM}\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{u}' := \frac{1}{F'M}\overrightarrow{F'M}$.



On a $FM + F'M = 2a$ donc $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{F'M} \cdot \overrightarrow{u}' = 2a$ donc, comme dans la preuve du Théorème 5.2, en dérivant on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{FM} \cdot \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{F'M}}{dt} \cdot \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{F'M} \cdot \frac{d\overrightarrow{u}'}{dt} = 0.$$

Puisque $\overrightarrow{u}$ est de norme 1 on sait que $\overrightarrow{u} \cdot \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = 0$, ainsi $\overrightarrow{FM} \cdot \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = 0$ et pareil avec les $'$. On obtient alors :

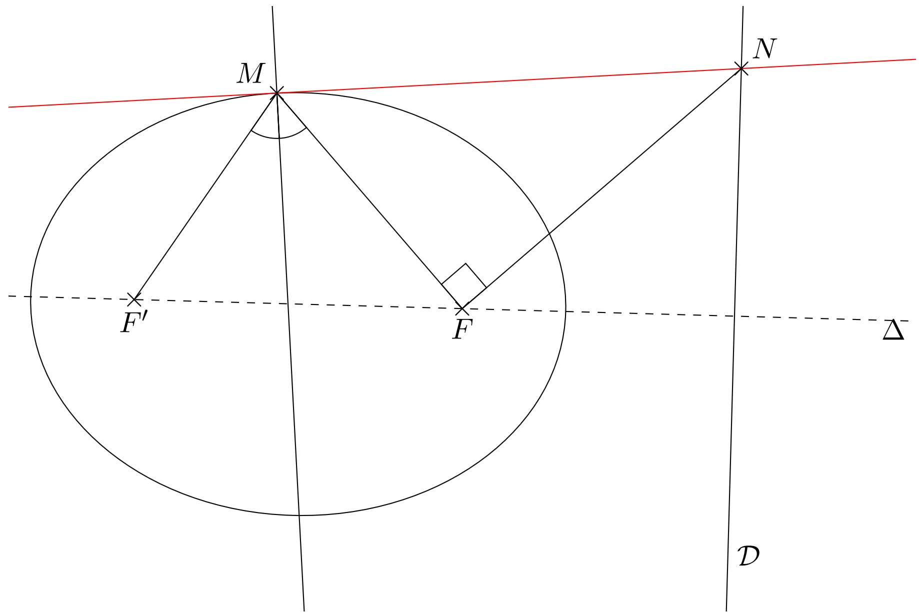
$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} \cdot \overrightarrow{u} + \frac{d\overrightarrow{F'M}}{dt} \cdot \overrightarrow{u}' = 0.$$

On a $\overrightarrow{F'M} = \overrightarrow{F'F} + \overrightarrow{FM}$ avec $\overrightarrow{F'F}$ constant donc on obtient finalement :

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') = 0.$$

On conclut puisque $\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}$ dirige la tangente et $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ dirige la bissectrice (intérieure) (cf. losange !). $\square$

La figure suivante illustre le résultat précédent et le Théorème 5.2.



Ce phénomène de passage par les deux foyers a de nombreuses applications, par exemple : conversation discrète dans une salle ellipsoïdale, dialogue de part et d'autre du quai d'une station de métro à Paris. On obtient un résultat similaire pour l'hyperbole.

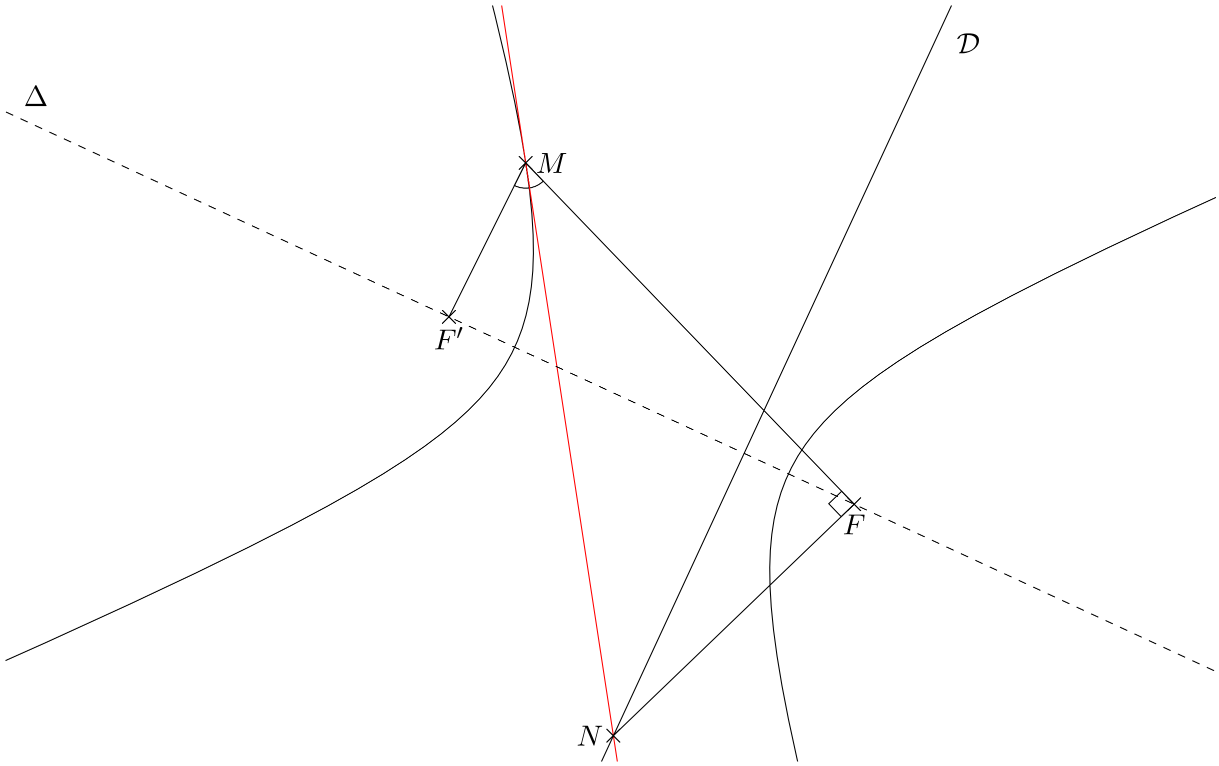
Proposition 5.7 (Tangentes à une hyperbole)**.** *On suppose $e > 1$. La tangente à un point $M \in \mathcal{C}_e$ de l'hyperbole est la bissectrice (intérieure) issue de M du triangle MFF'.*

Démonstration. Les composantes connexes de $\mathcal{C}_e$ ont pour équation $MF - MF' = \pm 2a$. Avec la même démonstration que dans le cas de l'ellipse, on trouve donc que :

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') = 0.$$

On conclut puisque $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}'$ dirige la bissectrice extérieure (encore cf. losange, mais on peut juste dire qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ qui lui dirige la bissectrice intérieure). $\square$

La figure suivante illustre le résultat précédente et le Théorème 5.2.



6 Et plus si affinités

Dans le Mercier : propriétés des sécantes à une hyperbole, cercle directeur, nombre de tangentes issues d'un point, podaires, théorèmes de Poncelet, sécantes à une conique, théorèmes belges (sphères inscrites dans un cône et tangentes à un plan, théorèmes de Dandelin et Quételet), ellipses inscrites, exinscrites ou circonscrites (voir à ce sujet le TD de géométrie sur l'ellipse de Steiner).