Combinatoire - TD - Correction

Salim Rostam
Complément d'algèbre pour l'agrégation, ENS Rennes

Inversion de Möbius

Exercice 1. Soient $n, q \in \mathbb{N}^*$. Un *collier* de n perles et q couleurs est une classe d'équivalence de n-uplets d'éléments de $\{0, \ldots, q-1\}$ modulo la relation d'égalité à permutation circulaire près. Pour $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \{0, \ldots, q-1\}^n$, on notera $[c]$ le collier associé. On dit que $[c]$ est *périodique* s'il existe $k \mid n$ et un k-uplet de perles $d = (d_0, \ldots, d_{k-1}) \in \{0, \ldots, q-1\}^k$ à q couleurs tel que $c_i = d_j$ si $i = j \pmod k$, auquel cas le collier est dit *k-périodique*. Remarquez que tout collier est n-périodique, et un collier de période n est dit *apériodique*. Si q est une puissance d'un nombre premier, montrer qu'il y a autant que colliers de n perles à q couleurs apériodiques que de polynômes unitaires irréductibles de degré n à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. *Soit $[c]$ un collier périodique de période k, où k est un diviseur strict de n. Il y a exactement k éléments de $\{0, \ldots, q-1\}^n$ qui correspondent à ce collier. Puisque chaque élément de $\{0, \ldots, q-1\}^n$ correspond à un (unique) collier, on en déduit que*

$$q^n = \sum_{k \mid n} k N_k,$$

où N_k est le nombre de colliers de période k à q couleurs et n perles. Par inversion de Möbius, on en déduit que

$$n N_n = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) q^k,$$

ce qui conclut l'exercice.

Exercice 2. Si $a = (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, on considère sa *série de Dirichlet* $\zeta_a(s) \coloneqq \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ pour $s \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, montrer que ζ_a converge absolument si $s > 1$. *On a* $\frac{a_n}{n^s} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{(s+1)/2}}\right)$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $s \in \mathbb{R}$ tels que ζ_a et ζ_b convergent absolument en s. Montrer que ζ_{a*b} converge absolument en s, où $(a*b)_n = \sum_{k \mid n} a_k b_{n/k}$. (Remarque : le résultat reste vrai si $\zeta_b(s)$ est simplement convergente, mais peut devenir faux si $\zeta_a(s)$ et $\zeta_b(s)$ sont toutes les deux simplement convergentes.) *On remarque tout d'abord que la série $\zeta_{|a|*|b|}(s)$ converge (absolument), puisque $\zeta_{|a|}(s)$ et $\zeta_{|b|}(s)$ convergent (absolument) et*

$$\begin{aligned}
\zeta_{|a|}(s)\zeta_{|b|(s)} &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n|}{n^s}\right) \\
&= \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|a_n||b_n|}{(nm)^s} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k \mid n} |a_k||b_{n/k}|}{n^s} \\
&= \zeta_{|a|*|b|}(s).
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque

$$\begin{aligned}\left|(a*b)_n \frac{1}{n^s}\right| &= \left|\sum_{k|n} a_k b_{n/k} \frac{1}{n^s}\right| \\ &\leq \sum_{k|n} |a_k||b_{n/k}| \frac{1}{n^s} \\ &= \frac{(|a|*|b|)_n}{n^s},\end{aligned}$$

on en déduit que $\zeta_{a*b}(s)$ converge absolument.

3. On note $\zeta \coloneqq \zeta_1$. En déduire l'égalité

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \zeta_\mu(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

pour $s > 1$. *Par la première question, puisque la suite constante égale à 1 et μ sont des suites bornées, pour tout $s > 1$ on a $\zeta(s)\zeta_\mu(s) = \zeta_{1*\mu}(s) = \zeta_\delta(s)$ où $\delta_n = \delta_{1,n}$.*

Actions de groupes

Exercice 3 (Nombre de matrices diagonalisables, 131 dév pour l'agreg)**.** Soit q une puissance d'un nombre premier. On écrit $\mathbb{F}_q = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$. Un q-uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{N}^q$ avec $|\alpha| \coloneqq \sum_{i=1}^q \alpha_i$ est appelé *composition de n*. Si α est une composition de n, on définit la matrice diagonale $D_\alpha \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_i I_{\alpha_i})_{1\leq i\leq q}$.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $|\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{m-1}(q^m - q^i) = q^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{i=1}^m (q^i - 1)$ (avec, par convention, $|\mathrm{GL}_0(\mathbb{F}_q)| \coloneqq 0$).

On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(q)$ sur $\mathrm{M}_n(q)$ par conjugaison, que l'on restreint à l'ensemble des matrices diagonalisables.

2. Montrer que $\{D_\alpha : \alpha \text{ composition de } n\}$ est un système de représentants des orbites. *Chaque orbite possède un représentant de la forme D_α (on diagonalise et on permute les coefficients diagonaux via une matrice de passage de permutation). De plus, les D_α sont dans les orbites distinctes puisque $\chi_{D_\alpha} = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.*
3. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ une composition de n, montrer que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(q)} D_\alpha \simeq \prod_{i=1}^q \mathrm{GL}_{\alpha_i}(q)$. *Une matrice M est dans $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(q)} D_\alpha$ si et seulement si M commute avec D_α et $M \in \mathrm{GL}_n(q)$. Si M commute avec D_α alors M stabilise ses sous-espaces propres donc M est diagonale par blocs, de la forme $M = \operatorname{diag}(M_i)_{1\leq i\leq q}$ avec M_i de taille α_i, auquel cas M est dans $\mathrm{GL}_n(q)$ si et seulement si chaque M_i est dans $\mathrm{GL}_{\alpha_i}(q)$. Réciproquement les matrices de cette forme conviennent, donc $\mathrm{Stab}_{GL_n(q)} D_\alpha$ est donné par l'ensemble des ces matrices. L'isomorphisme en découle.*
4. En déduire que le nombre de matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(q)$ est donné par

$$\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_q)\\ \text{composition de } n}} \frac{|\mathrm{GL}_n(q)|}{\prod_{i=1}^q |\mathrm{GL}_{\alpha_i}(q)|}.$$

On utilise simplement la formule orbite-stabilisateur : le nombre de matrices dans l'orbite de D_α est

$$\frac{|\mathrm{GL}_n(q)|}{|\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL_n(q)}} D_\alpha|},$$

et on conclut par la question précédente.

Exercice 4 (Combes, exo 2.3 p.50, voir aussi la note de Michel Coste sur le site de la prépa agreg de Beaulieu)**.** Soient $a, b \geq 1$ et $n \coloneqq a + b$. Combien peut-on faire de bracelets (colliers que l'on peut faire pivoter en 3D) en utilisant exactement a perles rouges et b perles bleues ? Vérifier le résultat obtenu avec $a = 3$ et $b = 5$. *On trouve naivement $\binom{n}{a}$ bracelets. On peut voir un tel collier comme un polygone régulier à n sommets, chaque sommet étant soit rouge soit bleu. Si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des bracelets naifs, le groupe diédral D_n agit donc sur $\mathcal{C}$ et on recherche le nombre d'orbites $|\mathcal{C}/D_n|$. La formule de Burnside donne :*

$$|\mathcal{C}/D_n| = \frac{1}{|D_n|} \sum_{g \in D_n} |{}^g\mathcal{C}|,$$

où ${}^g\mathcal{C}$ est le nombre de bracelets naifs fixés par g. Rappelons que $D_n = \{r^i s^j : 0 \leq i < n$ et $0 \leq j \leq 1\}$ où r est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s est une réflexion axiale.

1. *On suppose que g est de la forme r^i. Tous les sommets ont le même cardinal d'orbite sous l'action de g, en particulier une orbite est de cardinal l'ordre de g, qui est $\omega \coloneqq \frac{n}{n \wedge i}$. Puisque g doit envoyer un sommet rouge (resp. bleu) sur un sommet rouge (resp. bleu), on en déduit que si σ est un sommet alors $\sigma, g\sigma, \cdots, g^{\omega-1}\sigma$ sont des sommets rouges (resp. bleus) distincts. Ainsi, si un bracelet naïf est fixé par g alors nécessairement ω divise a et b donc $\omega \mid a \wedge b$. Si c'est le cas, en notant $a = \omega a'$ et $b = \omega b'$ il suffit de choisir a' orbites, que l'on va colorier en rouge, parmi les $\frac{n}{\omega} = a' + b'$ orbites sous g. Ainsi, on*

$$|{}^{r^i}\mathcal{C}| = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \nmid a \wedge b, \\ \binom{\frac{n}{\omega}}{\frac{a}{\omega}}, & \text{si } \omega \mid a \wedge b, \end{cases}$$

   avec $\omega = \frac{n}{n \wedge i}$. On rappelle qu'il y a exactement $\varphi(\omega)$ éléments d'ordre ω dans $\langle r^i \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $\omega \mid n$.

2. *On suppose maintenant que g est de la forme $r^i s$. Remarquons que, puisque $sr = r^{-1}s$, on a $g^2 = (r^i s)(r^i s) = r^i r^{-i} s^2 = 1$ donc g est d'ordre 2. On va distinguer les cas selon la parité de n.*

   (a) *Si n est impair, alors g est une réflexion axiale passant par un sommet σ et le milieu m du coté opposé. Si on a un bracelet naïf conservé par g, alors la couleur de σ n'importe pas et il suffit de choisir la couleur des sommets d'un côté du segment $[\sigma m]$. Puisque n est impair, un et un seul des entiers a et b est pair. Si c'est a, alors σ est nécessairement en bleu et il reste à choisir $\binom{(n-1)/2}{a/2}$ sommets (rouges), et vice-versa. Ainsi,*

$$|{}^g\mathcal{C}| = \begin{cases} \binom{(n-1)/2}{a/2}, & \text{si } a \text{ est pair}, \\ \binom{(n-1)/2}{(a-1)/2}, & \text{si } a \text{ est impair}. \end{cases}$$

   (b) *Si n est pair, on va encore distinguer deux cas. Remarquons que si g stabilise un bracelet naïf alors a et b ont nécessairement la même parité.*

      i. *Si g est une réflexion axiale passant par deux sommets opposés σ et σ' (il y a $\frac{n}{2}$ possibilités pour une telle g), il suffit de déterminer la couleur de σ, σ' et des sommets d'un côté du segment $[\sigma\sigma']$. Si a est pair (et donc b aussi), alors σ et σ' sont soit tous les deux bleus soit tous les deux rouges et reste donc $\binom{n/2-1}{a/2}$ choix* *de billes rouges (si σ et σ' sont bleus) ou $\binom{n/2-1}{b/2}$ (si σ et σ' sont rouges). Si a est impair (et donc b aussi), alors σ et σ' sont de couleur différentes (rouge-bleu ou bleu–rouge) et pour un tel choix de couleurs il reste donc $\binom{n/2-1}{(a-1)/2}$ choix pour les billes rouges. Ainsi,*

$$|{}^g\mathcal{C}| = \begin{cases} \dbinom{n/2-1}{a/2} + \dbinom{n/2-1}{a/2-1}, & \text{si } a \text{ est pair,} \\ 2\dbinom{n/2-1}{(a-1)/2}, & \text{si } a \text{ est impair.} \end{cases}$$

ii. *Si g est une réflexion axiale passant par les milieux m et m' de deux côtés opposés (il y a $\frac{n}{2}$ possibilités pour une telle g), nécessairement a et b sont pairs et il suffit de choisir les $\binom{n/2}{a/2}$ billes rouges d'un côté du segment $[mm']$, ainsi*

$$|{}^g\mathcal{C}| = \binom{n/2}{a/2}.$$

Finalement, le nombre $N_{a,b}$ de bracelets à $n = a + b$ billes avec exactement a perles rouges et b perles bleues est donné par :

$$N_{a,b} = \frac{1}{2n} \sum_{\omega | a\wedge b\wedge n} \varphi(\omega) \binom{n/\omega}{a/\omega} + \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left[\dbinom{n/2-1}{a/2} + \dbinom{n/2-1}{a/2-1} + \dbinom{n/2}{a/2}\right], & \text{si } a \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2}\dbinom{n/2-1}{(a-1)/2}, & \text{si } a \text{ est impair,} \end{cases}$$

si n est pair, et

$$N_{a,b} = \frac{1}{2n} \sum_{\omega | a\wedge b\wedge n} \varphi(\omega) \binom{n/\omega}{a} + \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dbinom{(n-1)/2}{a/2}, & \text{si } a \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2}\dbinom{(n-1)/2}{(a-1)/2}, & \text{si } a \text{ est impair,} \end{cases}$$

si n est impair. Si $a = 3$ et $b = 5$, on obtient

$$N_{3,5} = \frac{1}{2\cdot 8}\binom{8}{3} + \frac{1}{2}\binom{3}{1} = 5,$$

et on retrouve bien ces valeurs à la main : on commence par choisir deux billes rouges adjacentes (on trouve 3 bracelets), puis deux billes rouges distante de une bille (on trouve deux bracelets) et les autres configurations sont incluses dans les précédentes.

Exercice 5. Soit $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ un tétraèdre régulier.

1. (Caldero–Germoni Proposition 3.12 p.363) Déterminer le groupe des isométries et le groupe des isométries directes de $\mathcal{T}$. *Si A, B, C, D sont les sommets de $\mathcal{T}$, la réflexion orthogonale de plan ABI où I est le milieu de $[CD]$ fixe A, B et permute C et D. Ainsi,* $\mathrm{Is}(\mathcal{T}) \subseteq \mathfrak{S}_4$ *contient toutes les transpositions donc* $\mathrm{Is}(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{S}_4$. *Puisque* $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T})$ *est d'indice 2 dans* $\mathrm{Is}(\mathcal{T})$ *on en déduit que* $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{A}_4$. *Remarquons que les 3-cycles sont les rotations d'axe un sommet du tétraèdre et le milieu de la face opposée et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et les doubles transpositions sont les rotations d'axe les milieux de deux côtés non adjacents.*

2. Déterminer le nombre de coloriages de $\mathcal{T}$ (par rapport aux isométries directes). *Un coloriage de $\mathcal{T}$ possède au plus 4 couleurs (puisque $\mathcal{T}$ possède 4 faces). L'ensemble $\mathcal{C}$ des coloriages naifs est donc $\{1, \ldots, 4\}^4$. Le groupe $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T})$ agit sur $\mathcal{C}$, et l'objectif est de déterminer le nombre N d'orbites. Pour cela, on utilise la formule de Burnside, qui donne :*

$$N = \frac{1}{|\mathrm{Is}^+(\mathcal{T})|} \sum_{\sigma \in \mathrm{Is}^+(\mathcal{T})} {}^{\sigma}\mathcal{C},$$

où ${}^{\sigma}\mathcal{C}$ est le nombre de coloriages naïfs fixés par σ. On a vu dans la question précédente quels étaient les éléments de $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{A}_4$.

— *Si $\sigma = 1$ alors tous les 4^4 coloriages naïfs sont fixés.*

— *Si σ est un 3-cycle alors il suffit de choisir la couleur de la face fixe et la (même) couleur des trois autres, donc il y a 4^2 coloriages naïfs fixés par σ.*

— *Si σ est une double transposition alors il suffit de choisir la couleur de deux faces adjacentes données, donc il y a 4^2 coloriages naïfs fixés par σ.*

Puisqu'il y a $\binom{4}{1}2 = 8$ 3-cycles et $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$ doubles transpositions et que $|\mathfrak{A}_4| = \frac{4!}{2} = 4 \cdot 3$, la formule de Burnside donne

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{4 \cdot 3}(1 \cdot 4^4 + 8 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^2) \\ &= \frac{1}{3}(4^3 + 11 \cdot 4) \\ &= \frac{1}{3}(64 + 44) \\ &= \frac{108}{3} \\ &= 36. \end{aligned}$$

Exercice 6 (Loi de réciprocité quadratique, Caldero–Germoni Annexe C p.182)**.** Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts. On rappelle que pour $a \in \mathbb{F}_p^*$, le *symbole de Legendre* $\left(\frac{a}{p}\right)$ vaut 1 si a est un carré dans $\mathbb{F}_p$ et -1 sinon. On considère l'ensemble suivant :

$$X \coloneqq \left\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{F}_q^p : x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1\right\}.$$

1. Si $a \in \mathbb{F}_p^*$, montrer que $|\{x \in \mathbb{F}_q : ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{q}\right)$.
2. En faisant agit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X, montrer que $|X| = 1 + \left(\frac{p}{q}\right) \pmod p$.
3. Montrer que X a le même cardinal que l'ensemble suivant :

$$\left\{(y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_d, t) \in \mathbb{F}_q^p : 2(y_1 z_1 + \cdots + y_d z_d) + at^2 = 1\right\},$$

où $d \coloneqq \frac{p-1}{2}$ et $a \coloneqq (-1)^d$. *On considère la matrice de taille $p \times p$ suivante :*

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & & a \end{pmatrix}.$$

Elle est de déterminant (non nul) $(-1)^{\frac{p-1}{2}}a = 1$ donc elle est équivalente à la matrice I_p et on peut donc trouver une matrice inversible P telle que $M = P^\intercal P$. Ainsi, l'application $x \mapsto Px$ réalise une bijection entre $\{x \in \mathbb{F}_q^p : x^\intercal M x = 1\}$ et $X = \{x \in \mathbb{F}_q^p : x^\intercal x = 1\}$ d'où le résultat.

4. En déduire que $|X| = q^d\left(q^d + \left(\frac{a}{p}\right)\right)$. *Si $y_1 = \cdots = y_d = 0$ alors $z_1, \ldots, z_d$ sont choisis librement et le nombre de t possibles est donné par la question 1, on trouve donc $q^d\left(1 + \left(\frac{a}{q}\right)\right)$ éléments. Sinon, pour chaque t l'élement $z = (z_1, \ldots, z_d)$ est dans un hyperplan affine donc il y a q^d choix. Il y a donc $(q^d-1)qq^d = (q^d-1)q^d$ éléments avec au moins un y_i non nul, et on trouve donc*
$$|X| = q^d\left(1 + \left(\frac{a}{q}\right)\right) + (q^d-1)q^d = q^d\left(\frac{a}{q}\right) + q^{2d}.$$
Finalement, puisque $\left(\frac{a}{q}\right) = a^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \pmod q$ et que $q > 2$ on en déduit que $\left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ et donc
$$|X| = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}q^d + q^{2d}.$$

5. Conclure. *Par la question précédente, puisque*
$$q^{2d} = q^{p-1} = 1 \pmod p,$$
et
$$q^d = q^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{q}{p}\right) \pmod p,$$
on a
$$|X| = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right) + 1 \pmod p,$$
donc par la question 2 on obtient, puisque $p > 2$,
$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right),$$
ce qui conclut.

Séries formelles

Exercice 7 (Nombres de Bell, FGN algèbre 1)**.** Pour $n \geq 0$, on note B_n le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$ (avec $B_0 = 1$). On considère la série formelle $B \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} X^n$.

1. Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n+1-k}$. *Indication* : étant donnée une partition de $\{1, \ldots, n+1\}$, on pourra noter k le cardinal de la partie contenant $n+1$.
2. Montrer que $B' = Be^X$.
3. En déduire que $B = e^{e^X-1}$. L'écriture e^{e^X} a-t-elle un sens à priori dans les séries formelles ? *Si f et g sont deux séries formelles, la composition $f \circ g$ n'a de sens que si la valuation de g est strictement positive, c'est-à-dire si g n'a pas de terme constant. En effet, le terme en X^n de $f \circ g$ est alors donné par une somme finie.*

4. Montrer que $B_n \leq n!$ et en déduire que la série entière associée à B est de rayon de convergence au moins 1.
5. En déduire une formule close pour les B_n. *Pour tout $x < 1$ on a $B(x) = e^{e^x - 1} = \frac{1}{e} e^{e^x}$ et on a une série double.*

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p(n)$ le nombre de partitions de n. On rappelle que c'est le nombre de suites finies $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h > 0)$ d'entiers naturels non nuls de somme n, les λ_i sont appelés *parts* de la partition.

1. Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n) X^n$ la série génératrice associée.
   (a) Montrer que $P = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - X^i}$. On prendra soin de préciser le sens de ce produit infini. *On a $P = \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + X^i + X^{2i} + \ldots)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $P = \prod_{i=0}^{n} (1 + X^i + X^{2i} + \ldots) \times \prod_{i=n+1}^{+\infty} (1 + X^i + X^{2i} + \ldots)$ donc le terme en X^n de P est déterminé par le premier facteur, qui est un produit fini.*
   (b) En déduire que le rayon de convergence de la série entière associée à P est non nul. *Le produit $\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^i}$ converge si $x \in [0, 1[$, en effet en passant au logarithme on trouve $-\sum_{i=1}^{+\infty} \ln(1 - x^i)$ et $\ln(1 - x^i) \simeq -x^i$ quand $i \to \infty$ puisque $|x| < 1$, donc la somme des logs converge puisque $-x^i < 0$ pour tout $i > 0$. Ainsi, pour tout $0 < x < 1$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{n=0}^{N} p(n) x^n \leq \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{1-x^i}$ (par le même raisonnement que précédemment) donc les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} p(n) x^i$ sont majorées donc cette série converge.*
2. Montrer qu'il y a autant de partitions de n en entiers impairs que de partitions de n avec toutes les parts distinctes.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k(n)$ le nombre de partitions de n en exactement k parts.
   (a) Montrer que $p_k(n)$ est le nombre de partitions de n où k est la plus grande part. *Indication* : on pourra regarder le diagramme de Young associé à l'envers.
   (b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_k(n) X^n = \frac{X^k}{1-X^k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1-X^i}$. *On raisonne comme dans la série génératrice de p(n), mais ici comme la plus grand part est k on arrête de produit à $i = k$, et comme la part k apparait au moins une fois le terme $\frac{1}{1-X^k} = 1 + X^k + X^{2k} + \ldots$ doit être remplacé par $X^k + X^{2k} + \cdots = \frac{X^k}{1-X^k}$.*
   (c) Montrer que $p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)$. *Si λ est une partition de n où k est la plus grande part, on distingue deux cas. Si k apparait deux fois dans λ alors λ résulte du choix d'une partition de $n - k$ où k est la plus grande part. Si k apparait une unique fois dans λ alors λ résulte d'une partition de $n - 1$ où $k - 1$ est la plus grande part (λ s'obtient alors en ajoutant 1 à cette plus grande part).*

Exercice 9 (Nombres de Catalan, FGN algèbre 1)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, soit C_n le nombre de parenthésages d'une expression à $n+1$ symboles. Soit $C = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n X^n$ la série formelle associée.

1. Montrer que $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.
2. En déduire que $C = 1 + XC^2$.
3. En déduire que $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.