Combinatoire et dénombrement

Salim Rostam
Complément d'algèbre pour l'agrégation, ENS Rennes

1 Échauffement : formule du crible

On va montrer ici la formule du crible de Poincaré. Toute ou une partie de cette section peut constituer un développement.

1.1 La formule

Soit E un ensemble et soient $E_1, \ldots, E_n$ des parties finies de E.

Théorème 1.1 (Formule du crible de Poincaré [1])**.** *On a*

$$\left|\bigcup_{i=1}^n E_i\right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} \left|E_{j_1} \cap \cdots \cap E_{j_i}\right|.$$

Démonstration. Si F est un sous-ensemble de E, on considère sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_F : E \to \mathbb{N}$ définie par $\mathbf{1}_F(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{si } x \in F, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$ pour tout $x \in E$. Rappelons que si T et $X_1, \ldots, X_n$ sont des indéterminées on a

$$\prod_{i=1}^n (T - X_i) = T^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} X_{j_1} \cdots X_{j_i}\right) T^{n-i}$$

Puisque $(E_1 \cup \cdots \cup E_n)^c = E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c$, pour tout $x \in E$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{E_1\cup\cdots\cup E_n}(x) &= 1 - \prod_{i=0}^n \left(1 - \mathbf{1}_{E_i}(x)\right) \\
&= -\sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} \mathbf{1}_{E_{j_1}}(x) \cdots \mathbf{1}_{E_{j_i}}(x) \\
&= -\sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} \mathbf{1}_{E_{j_1}\cap\cdots\cap E_{j_i}}(x) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} \mathbf{1}_{E_{j_1}\cap\cdots\cap E_{j_i}}(x),
\end{aligned}$$

et on conclut en sommant sur tous les $x \in E$. □

Remarque 1.2. Pour $n = 2$ on retrouve la formule classique $|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$. Attention, la formule analogue pour les espaces vectoriels (formule de Grassmann) ne se généralise pas au cas $n \geq 3$!

1. Henri Poincaré, 1854–1912, cousin de Raymond Poincaré (président de la IIIe République).

1.2 Applications

Théorème 1.3. *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. Le nombre de surjections de $\{1, \ldots, m\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ est donné par*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m.$$

Démonstration. Soit E l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, m\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit E_i l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, m\}$ vers $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. On cherche à calculer $|E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c|$. On a :

$$\begin{aligned}
|E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c| &= n^m - |E_1 \cup \cdots \cup E_n| \\
&= n^m - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n} |E_{j_1} \cap \cdots \cap E_{j_i}| \\
&= n^m + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n} (n-i)^m \\
&= n^m + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n}{i} (n-i)^m \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n}{i} (n-i)^m \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.4. Avec $m = n$ on obtient la formule $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!$, et si $m < n$ on obtient $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m = 0$. Ces identités peuvent se retrouver en calculant de deux façons la composée n-ième de l'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{Q}_n[X]$.

De la même façon, on peut montrer que le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, \ldots, n\}$ est $n! \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}$. Finalement, en utilisant des formules de récurrence, on peut retrouver ces formules en utilisant l'*inversion de Pascal*[2].

Théorème 1.5 (Inversion de Pascal)**.** *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un anneau k commutatif et définissons*

$$b_n := \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} b_i.$$

Démonstration. Posons $A := (a_0, \ldots, a_n)$ et $B := (b_0, \ldots, b_n)$. Par définition, on a $B = AM$ où M est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme de $k_n[X]$ donné par $P(X) \mapsto P(X+1)$. Ainsi $A = BM^{-1}$, et on a bien la formule annoncée en remarquant que M^{-1} est la matrice dans la base canonique de $P(X) \mapsto P(X-1)$. □

2. Blaise Pascal, 1623–1662. Mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, ...

2 Inversion de Möbius

Toute ou une partie de cette section peut constituer un développement (voir en partie [Per, Ch. III, Exercice 2.7, p. 89] et [FrGi, p. 93]).

Définition 2.1. Si E est un ensemble, on note $\mathcal{F}_E := \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, E)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans E. Ce sont les suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans E.

2.1 Dans un anneau

Soit A un anneau commutatif unitaire. On munit l'ensemble $\mathcal{F}_A$ des lois de composition interne suivantes :

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(n) &:= \phi(n) + \psi(n),\\ (\phi * \psi)(n) &:= \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^*\\ d\mid n}} \phi\left(\frac{n}{d}\right)\psi(d) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}^*\\ ab=n}} \phi(a)\psi(b),\end{aligned}$$

pour tous $\phi, \psi \in \mathcal{F}_A$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $(\mathcal{F}_A, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire, où l'unité pour la loi $*$ est $\delta \in \mathcal{F}_A$ définie par

$$\delta(n) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 2.2 (Remarque analytique (I)). On suppose ici $A = \mathbb{C}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes. La *série de Dirichlet* associée est $\zeta_a := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ où $s \in \mathbb{C}$. Si (b_n) est une autre telle suite et (c_n) est donnée par $c := a * b$, c'est-à-dire $c_n = \sum_{k\ell=n} a_k b_\ell$ alors $\zeta_c = \zeta_a\zeta_b$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

(avec des hypothèses de convergence).

Proposition 2.3. *Les inversibles de $\mathcal{F}_A$ sont les $\phi \in \mathcal{F}_A$ tels que $\phi(1)$ est inversible dans A, autrement dit*

$$\mathcal{F}_A^\times = \left\{\phi \in \mathcal{F}_A : \phi(1) \in A^\times\right\}.$$

Démonstration. Rappelons que l'anneau A est commutatif. Si $\phi \in \mathcal{F}_A^\times$, alors il existe $\psi \in \mathcal{F}_A$ tel que $\phi * \psi = \delta$. Ainsi, on a

$$1 = (\phi * \psi)(1) = \phi(1)\psi(1),$$

donc $\phi(1) \in A^\times$. Réciproquement, soit $\phi(1) \in A^\times$. On définit un élément $\psi \in \mathcal{F}_A$ par récurrence par

$$\psi(n) := \phi(1)^{-1}\left(\delta(n) - \sum_{\substack{1\leq d<n\\ d\mid n}} \phi\left(\frac{n}{d}\right)\psi(d)\right),$$

et on vérifie que $\phi * \psi = \delta$. □

On va maintenant considérer un élément particulier de $\mathcal{F}_A$.

Définition 2.4. On définit $\mathbf{1} \in \mathcal{F}_A$ par $\mathbf{1}(n) := 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 2.5 (Remarque analytique (II)). On suppose ici $A = \mathbb{C}$. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de complexes et $b := \mathbf{1} * a$, on a $b_n = \sum_{d|n} a_d$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

(avec des hypothèses de convergence), où $\zeta = \zeta_{\mathbf{1}}$ est la fonction zêta de Riemann. On a également une égalité en terme de *série de Lambert* :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

D'après la Proposition 2.3, l'élément $\mathbf{1} \in \mathcal{F}_A$ est inversible ; on note $\mu := \mathbf{1}^{-1} \in \mathcal{F}_A$ son inverse. On veut maintenant expliciter μ. Par définition, on a $\mu * \mathbf{1} = \delta$, donc $\mu(1) = 1$ et

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0, \tag{2.6}$$

si $n \geq 2$.

Lemme 2.7. *Soit $n \geq 2$ et soit p un facteur premier de n. Alors $\mu(pn) = 0$. Autrement dit, si $m \in \mathbb{N}^*$ a un facteur carré alors $\mu(m) = 0$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 2$. Soient $\alpha \geq 1$ et m tels que $n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$. Par (2.6) on a

$$\begin{aligned}
\mu(pn) &= -\sum_{\substack{d|pn \\ d\neq pn}} \mu(d) \\
&= -\sum_{\substack{d|pn \\ d\neq pn \\ p^{\alpha+1}|d}} \mu(d) - \sum_{\substack{d|pn \\ p^{\alpha+1}\nmid d}} \mu(d) \\
&= -\sum_{\substack{d|pn \\ d\neq pn \\ p^{\alpha+1}|d}} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

En effet, si $d \mid n$ alors $d \mid pn$ et $p^{\alpha+1} \nmid d$, et réciproquement si $d \mid pn$ et $p^{\alpha+1} \nmid d$ alors en écrivant $d = p^\beta m'$ avec $p \nmid m'$ on a :

— $m' \mid pn = p^{\alpha+1} m$ donc $m' \mid m$ puisque $p \wedge m' = 1$;

— $\beta \leq \alpha$ puisque $\beta < \alpha + 1$ puisque $p^{\alpha+1} \nmid d$;

donc en en déduit que $d = p^\beta m' \mid p^\alpha m = n$. Remarquons que, d'après (2.6), la deuxième somme de (2.8) est nulle. De plus, la première somme est vide, donc nulle, si $n = 2$ (et, nécessairement, $p = 2$) ce qui initialise la propriété. Si $n \geq 3$, chaque $\mu(d)$ de la première somme est nul puisque $d = p\frac{d}{p}$ et que p est un facteur premier de $\frac{d}{p} < n$. □

Proposition 2.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \textit{si } n \textit{ possède un facteur carré,} \\ (-1)^r, & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où $r \in \mathbb{N}$ est le nombre de nombre premiers distincts divisant n.

Autrement dit, si $n = p_1 \cdots p_r$ est la décomposition de n en facteurs premiers (avec $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ et $\alpha_i \neq 0$) alors $\mu(n) = 0$ s'il existe i avec $\alpha_i \geq 2$ et $\mu(n) = (-1)^r$ sinon.

Démonstration. Par le lemme, il suffit de montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont des premiers distincts alors $\mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r$. Encore une fois, on utilise (2.6) et on procède par récurrence, cette fois sur $r \geq 1$. L'initialisation est immédiate puisque $\mu(p) = -\mu(1) = -1$ si p est premier. On suppose maintenant $r \geq 2$. En remarquant que les diviseurs de $p_1 \cdots p_r$ sont des produits de p_i et qu'il y a $\binom{r}{k}$ façons de choisir un diviseur de $p_1 \cdots p_r$ de k termes, on obtient, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\mu(p_1 \cdots p_r) &= -\sum_{\substack{d \mid p_1 \cdots p_r \\ d \neq p_1 \cdots p_r}} \mu(d) \\ &= -\sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} (-1)^k \\ &= (-1)^r - (1-1)^r \\ &= (-1)^r.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.10 (Remarque analytique (III)). Puisque $\delta = \mathbf{1} * \mu$ on a $1 = \zeta(s)\zeta_\mu(s)$ donc $1 = \zeta(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$. En rappelant la formule du produit eulérien :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots) = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s})^{-1},$$

on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n) n^{-s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s}),$$

donc on retrouve bien la formule de la Proposition 2.9.

2.2 Dans un groupe abélien

Soit G un groupe abélien. On munit le groupe abélien $\mathcal{F}_G$ d'une action à gauche du groupe $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{\times}, *)$ par :

$$(\phi \odot f)(n) \coloneqq \sum_{\substack{d \in \mathbb{N}^* \\ d \mid n}} \phi\left(\frac{n}{d}\right) f(d), \tag{2.11}$$

pour tous $\phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{\times}$, $f \in \mathcal{F}_G$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, on a $\delta \odot f = f$ et si $\psi \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{\times}$ alors :

$$\psi \odot (\phi \odot f) = (\psi * \phi) \odot f. \tag{2.12}$$

Remarque 2.13. On peut faire agir l'anneau $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}, +, *)$ tout entier sur $\mathcal{F}_G$, ce qui munit $\mathcal{F}_G$ d'une structure de $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$-module (du coup on évite d'en parler).

Théorème 2.14 (Formule d'inversion de Möbius [3])**.** *Soit $f \in \mathcal{F}_G$ et soit $g \in \mathcal{F}_G$ définie par*

$$g(n) \coloneqq \sum_{d \mid n} f(d),$$

3. August Ferdinand Möbius, 1790–1868.

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Démonstration. Par définition, on a $g = \mathbf{1} * f$. Ainsi, par (2.12) on obtient :

$$\begin{aligned}\mu \odot g &= \mu \odot (\mathbf{1} \odot f) \\ &= (\mu * \mathbf{1}) \odot f \\ &= \delta \odot f \\ &= f.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.15. À la place de $\mathbb{N}^*$, on peut considérer n'importe quel ensemble (partiellement) ordonné $(N, \leq)$ tel que pour chaque $n \in N$, la partie $\{m \in N : m \leq n\}$ est finie — par exemple, l'ensemble des parties d'un ensemble fini muni de l'inclusion — et donner un analogue de la formule d'inversion.

Corollaire 2.16. *Soit G un groupe abélien. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites d'éléments de G telles que*

$$b_n = \sum_{d|n} a_d,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) b_d,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3 Applications

On présente maintenant une liste d'applications possibles.

2.3.1 Indicatrice d'Euler

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ l'indicatrice d'Euler : pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $\varphi(n)$ est le nombre de $k \in \{1, \dots, n\}$ premiers à n. C'est aussi le cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Proposition 2.17. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.*

Démonstration. C'est une égalité classique. On peut la montrer soit en remarquant qu'il y a exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $d \mid n$, soit en écrivant sous forme irréductible les fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$. □

Une application directe du Théorème 2.14 avec $A = M = \mathbb{Z}$ donne donc le corollaire suivant.

Corollaire 2.18. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$.*

2.3.2 Nombre de polynômes irréductibles

Soit q une puissance d'un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note $I(q,d)$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré d sur le corps fini $\mathbb{F}_q$. On a la relation suivante :

$$X^{q^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in I(q,d)} P,$$

donc en passant au degré,

$$q^n = \sum_{d|n} d|I(q,d)|.$$

Par le théorème d'inversion on a donc

$$|I(q,d)| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d.$$

2.3.3 Polynômes cyclotomiques

Le n-ième polynôme cyclotomique $\Phi_n \in \mathbb{C}[X]$ est donné par

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mu_n^\times} (X - \zeta).$$

On a $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$. En appliquant le Théorème 2.14 dans le groupe abélien (multiplicatif !) $\mathbb{C}(X)^*$, on a donc

$$\Phi_n = \prod_{d|n} \left(X^{\frac{n}{d}} - 1\right)^{\mu(d)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Utilisation d'une action de groupe

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble X. Pour $x \in X$ on note $G_x \subseteq G$ le stabilisateur de x.

Proposition 3.1 (Formule des classes)**.** *On a $G/G_x \simeq G \cdot x$ donc $|G| = |G_x| \cdot |G \cdot x|$.*

Un développement très utile qui utilise ce résultat est la démonstration de la loi de réciprocité quadratique de [CaGe]. Mentionnons également le résultat suivant, également utilisable en développement.

Théorème 3.2. *Soit q une puissance d'un nombre premier. Le nombre de matrices diagonalisables de $\mathrm{Mat}_n(q)$ est*

$$\sum_{\substack{m_1,\dots,m_q \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_q=n}} \frac{|\mathrm{GL}_n(q)|}{\prod_{i=1}^{q} |\mathrm{GL}_{m_i}(q)|},$$

avec la convention $|\mathrm{GL}_0(q)| = 1$.

Remarque 3.3. On a $|\mathrm{GL}_m(q)| = \prod_{i=0}^{m-1}(q^m - q^i) = q^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{i=0}^{m-1}(q^i - 1)$.

Démonstration. On fait agir $\mathrm{GL}_n(q)$ sur l'ensemble des matrices diagonalisables. Si $\mathbb{F}_q = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, chaque orbite possède une unique matrice de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_i \mathrm{I}_{m_i})_{i=1\dots q}$ où $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{N}$ avec $m_1 + \cdots + m_q = n$. Le stabilisateur d'une telle matrice diagonale est isomorphe à $\mathrm{GL}_{m_1}(q) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_q}(q)$. □

Finissons par un théorème de Burnside.

Théorème 3.4.

$$|G\backslash X| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|G_x| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|{}^gX|.$$

Des applications « standards » sont par exemple le développement où l'on compte les colliers ou les bracelets de perles (à savoir faire mais à éviter, au moins dans sa version classique !) ou encore celui où l'on détermine le groupe des isométries d'un ou plusieurs solides donnés (cube, tétraèdre, diamant, etc.).

Remarque 3.5. Si on dit que les colliers (resp. bracelets) sont des orbites des sommets du polygone régulier à n sommets sous l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{D}_n$), alors $oxxoox$ et $oxooxx$ définissent le même bracelet mais pas le même collier.

4 Séries formelles

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un corps commutatif. On peut lui associer une série formelle particulière :

$$F_l(a) \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n.$$

Si de plus l'anneau de base est un corps de caractéristique nulle, on peut également définir

$$F_e(a) \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} X^n.$$

On peut s'intéresser au rayon de convergence des séries entières associées.

Exemple 4.1 (Nombres de Bell). (Voir [FGN-Al1].) Soit B_n le nombre de partitions de $\{1,\dots,n\}$. On a $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_n$, on en déduit que $F_e(B)' = F_e(B)e^X$ et donc $F_e(B) = e^{e^X-1}$.

Proposition 4.2. *Si (a_n) et (b_n) sont deux suites alors*

$$F_l(a)F_l(b) = F_l(c),$$
$$F_e(a)F_e(b) = F_e(d),$$

où (c_n) et (d_n) sont données par

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$
$$d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Application 4.3. On peut alors retrouver la *formule d'inversion de Pascal*, donnée au Théorème 1.5. En effet, soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite et définissons

$$b_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k.$$

On a $F_e(b) = F_e(a)F_e(1,1,\dots)$, et en remarquant que $F_e(1,1,\dots) = e^X$, on a $F_e(a) = F_e(b)e^{-X}$, d'où

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k.$$

5 Partitions

On va donner quelques résultats sur les partitions d'entiers.

Définition 5.1. Une *partition* d'un entier $n \in \mathbb{N}$ est une suite finie $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ décroissante d'entiers naturels non nuls. Chaque λ_i est une *part* de λ et h est le *nombre de parts* de λ.

Une façon très utile de représenter une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ est d'utiliser son *diagramme de Young*. On met λ_1 boîtes sur une ligne, puis dessous λ_2, etc. en justifiant les boîtes à gauche.

Exemple 5.2. Le diagramme de Young associé à la partition $(5, 3, 2)$ est $\ydiagram{5,3,2}$.

Autrement dit, le diagramme associé à la partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ est

$$\mathcal{Y}(\lambda) \coloneqq \{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 : 1 \leq a \leq h \text{ et } 1 \leq b \leq \lambda_a\}.$$

5.1 Formule des équerres

Soit λ une partition de n. Un *tableau* de Young de forme λ est une bijection $\mathfrak{t} : \mathcal{Y}(\lambda) \to \{1, \dots, n\}$, autrement dit, un étiquetage (bijectif) des cases du diagramme de Young de λ par les éléments de $\{1, \dots, n\}$. On dit que ce tableau est *standard* si les étiquettes sont croissantes selon les lignes et selon les colonnes (précisément, pour tout $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ et pour tout $\gamma \in \{(a+1, b), (a, b+1)\} \cap \mathcal{Y}(\lambda)$ on a $\mathfrak{t}(a, b) < \mathfrak{t}(\gamma)$).

Il est clair que le nombre de tableaux standard de forme donnée est fini, mais quel est leur nombre ? Une réponse est donnée par la spectaculaire *formule des équerres* (« hook length formula »). L'*équerre* associée à $(a, b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ est l'ensemble $H_\lambda(a, b)$ des boîtes de $\mathcal{Y}(\lambda)$ situées soit directement en bas soit directement à droite de (a, b), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} H_\lambda(a, b) &\coloneqq \{(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda) : [i \geq a \text{ et } j = b] \text{ ou } [i = a \text{ et } j \geq b]\} \\ &= \Big[(\mathbb{N}_{\geq a} \times \{b\}) \cup (\{a\} \times \mathbb{N}_{\geq b})\Big] \cap \mathcal{Y}(\lambda). \end{aligned}$$

On note $h_\lambda(a, b) \coloneqq \# H_\lambda(a, b)$ le cardinal de l'équerre $H_\lambda(a, b)$.

Proposition 5.3 (Formule des équerres, J. S. Frame, G. de B. Robinson et R. M. Thrall 1954)**.** *Soit λ une partition de n. Le nombre f_λ de tableaux de Young standards de forme λ est donné par :*

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{\gamma \in \mathcal{Y}(\lambda)} h_\lambda(\gamma)}.$$

Par exemple, pour la partition $\ydiagram{4,2}$, en notant dans chaque case les longueurs d'équerres on a $\begin{ytableau} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{ytableau}$ (attention, ça n'est pas un tableau !) donc la formule donne $\frac{6!}{5 \cdot 4 \cdot 2^2 \cdot 1^2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ tableaux standards, qui sont en effet :

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{ytableau}$$

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{ytableau}.$$

Remarque 5.4. Une démonstration erronée, due (en toute conscience) à D. E. Knuth[4] est la suivante. Étant donné un tableau $\mathfrak{t} : \mathcal{Y}(\lambda) \to \{1, \dots, n\}$, chaque case $\gamma \in \mathcal{Y}(\lambda)$ doit vérifier $\mathfrak{t}(\gamma) = \min\{\mathfrak{t}(\gamma') : \gamma' \in H_\lambda(\gamma)\}$. La probabilité pour que cet événement arrive est $\frac{1}{h_\lambda(\gamma)}$, donc en les multipliant toutes on obtient bien la formule annoncée (partant des $n!$ tableaux). Cet argument ne peut pas tenir puisque les crochets ne sont pas indépendants : certains s'intersectent.

4. Le même que LaTeX !

On se propose maintenant de donner une démonstration probabiliste de cette formule, due à Greene-Nijenhuis-Wilf [GNW] en 1979.

Une case $(a,b) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ est un *coin* si $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \{(a,b)\}$ reste un diagramme de Young. C'est équivalent à dire que $(a+1,b)$ et $(a,b+1)$ (et $(a+1,b+1)$) ne sont pas dans $\mathcal{Y}(\lambda)$, autrement dit, que $H_\lambda(\gamma) = \{\gamma\}$. Si γ est un coin et si λ_γ est la partition telle que $\mathcal{Y}(\lambda_\gamma) = \mathcal{Y}(\lambda) \setminus \{\gamma\}$, on note $\lambda_\gamma \nearrow \lambda$. Si $\mathfrak{t}$ est un tableau standard de forme λ, la case $\gamma \coloneqq \mathfrak{t}^{-1}(n)$ est un coin et $\mathfrak{t}|_{\mathcal{Y}(\lambda_\gamma)}$ est un tableau standard de forme λ_γ. Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$f_\lambda = \sum_{\mu \nearrow \lambda} f_\mu.$$

En notant d_λ le membre de droite de la Proposition, on a $d_{(1)} = 1 = f_{(1)}$ (ou même avec la partition vide) et par récurrence sur $|\lambda|$ (nombre de boîtes) il suffit de montrer que $d_\lambda = \sum_{\mu \nearrow \lambda} d_\mu$, c'est-à-dire :

$$\sum_{\mu \nearrow \lambda} \frac{d_\mu}{d_\lambda} = 1. \tag{5.5}$$

Pour cela, on va introduire une mesure de probabilité « naturelle » sur les diagrammes $\mu \nearrow \lambda$, la probabilité de tirer un diagramme μ étant $\frac{d_\mu}{d_\lambda}$.

On considère alors la « marche en crochets »(*hook walk*) sur $\mathcal{Y}(\lambda)$. Soit $\gamma \in \mathcal{Y}(\lambda)$. Si $\gamma_1 \coloneqq \gamma$ est un coin on s'arrête, et sinon pour $i \geq 1$, on choisit une boîte γ_{i+1} uniformément dans $H_\lambda(\gamma_i) \setminus \{\gamma_i\}$. Le processus s'arrête au bout d'un moment, en un coin $\overline{\gamma}$, car en notant $\gamma_i = (a_i, b_i)$, la quantité $a_i + b_i$ est strictement croissante et bornée. La suite des γ_i est appelée *trajectoire* issue de γ. On va montrer que si γ est tirée uniformément parmi les $|\lambda|$ boîtes de $\mathcal{Y}(\lambda)$ et si $\mathfrak{c}$ est un coin de $\mathcal{Y}(\lambda)$ alors :

$$\mathbb{P}(\overline{\gamma} = \mathfrak{c}) = \frac{d_{\lambda_\mathfrak{c}}}{d_\lambda}.$$

Soit $\mathfrak{c} = (a,b)$ un coin de $\mathcal{Y}(\lambda)$ et soit $\mu \coloneqq \lambda_\mathfrak{c}$. Calculons le ratio $\frac{d_\mu}{d_\lambda}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{d_\mu}{d_\lambda} &= \frac{(n-1)! \prod_{(i,j) \in \mathcal{Y}(\lambda)} h_\lambda(i,j)}{n! \prod_{(i,j) \in \mathcal{Y}(\mu)} h_\mu(i,j)} \\
&= \frac{1}{n} \prod_{(i,j) \in \mathcal{Y}(\mu)} \frac{h_\lambda(i,j)}{h_\mu(i,j)},
\end{aligned}$$

puisque $h_\lambda(\mathfrak{c}) = 1$ (il n'y a aucune boîte à gauche et aucune boîte en bas de $\mathfrak{c}$ par définition !). Maintenant, si $(i,j) \in \mathcal{Y}(\mu)$ n'est ni sur la même colonne ni sur la même ligne que $\mathfrak{c}$ alors $h_\lambda(i,j) = h_\mu(i,j)$ (car les boîtes à droite, resp. en bas, de (i,j) sont les mêmes dans $\mathcal{Y}(\lambda)$ et dans $\mathcal{Y}(\mu)$). Les boîtes de $\mathcal{Y}(\mu)$ sur la même ligne ou la même colonne que $\mathfrak{c} = (a,b)$ sont les (i,b) pour $1 \leq i < a$ et les (a,j) pour $1 \leq j < b$. Pour de telles boîtes γ, on a $h_\mu(\gamma) = h_\lambda(\gamma) - 1$ (puisque seule la boîte $\mathfrak{c} \notin \mathcal{Y}(\mu)$ n'est pas comptée) donc on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d_\mu}{d_\lambda} &= \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{a-1} \frac{h_\lambda(i,b)}{h_\mu(i,b)} \prod_{j=1}^{b-1} \frac{h_\lambda(a,j)}{h_\mu(a,j)} \\
&= \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{a-1} \frac{h_\lambda(i,b)}{h_\lambda(i,b)-1} \prod_{j=1}^{b-1} \frac{h_\lambda(a,j)}{h_\lambda(a,j)-1} \\
&= \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{a-1} \left(1 + \frac{1}{h_\lambda(i,b)-1}\right) \prod_{j=1}^{b-1} \left(1 + \frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{A \subseteq \{1,\dots,a-1\}} \sum_{B \subseteq \{1,\dots,b-1\}} \prod_{i \in A} \frac{1}{h_\lambda(i,b)-1} \prod_{j \in B} \frac{1}{h_\lambda(a,j)-1}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

On va maintenant retrouver d'une différente façon les produits de cette somme double. Soient $A \subseteq \{1, \dots, a\}$ et $B \subseteq \{1, \dots, b\}$. Soit $p(A, B)$ la probabilité qu'une trajectoire $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ de la marche en crochets satisfasse $A = \{a_i : 1 \leq i \leq m\}$ et $B = \{b_i : 1 \leq i \leq m\}$; on dit que A et B sont les ensembles de *projection* (vertical et horizontal) de la trajectoire.

Remarque 5.7. — Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est le couple de variables aléatoires donné par les ensembles de projections, alors $p(A, B) = \mathbb{P}(\mathcal{A} = A, \mathcal{B} = B)$.

— On a $\#A, \#B \leq m$ puisque si $i \leq m-1$ alors $a_i = a_{i+1}$ ou $b_i = b_{i+1}$.

Si X est un ensemble, on note $X^\vee \coloneqq X \setminus \max X$.

Lemme 5.8. *Soient $A \subseteq \{1, \dots, a\}$ et $B \subseteq \{1, \dots, b\}$. Si $(\max A, \max B)$ n'est pas un coin de λ alors $p(A, B) = 0$, et sinon on a :*

$$p(A, B) = \frac{1}{n} \prod_{i \in A^\vee} \frac{1}{h_\lambda(i, \max B) - 1} \prod_{j \in B^\vee} \frac{1}{h_\lambda(\max A, j) - 1}. \tag{5.9}$$

Démonstration. La première assertion est claire puisque la marche en crochets termine nécessairement sur un coin. On suppose maintenant que $(\max A, \max B)$ est un coin de λ. On raisonne par récurrence sur $\#A + \#B$. La probabilité $p(A, B)$ vaut $\frac{1}{n}$ si $\#A = \#B = 1$ puisque la trajectoire est un singleton et que la case $(\max A, \max B)$ est tirée avec probabilité $\frac{1}{n}$. De plus, l'équation (5.9) est vérifiée puisque les produits sont vides. Si $\#A > 1 = \#B$ (l'autre cas étant obtenu par symétrie), la première case est tirée avec probabilité $\frac{1}{n}$, la trajectoire reste sur une même colonne et les probabilités successives sont les $\frac{1}{h_\lambda(a,b)-1}$ pour a décrivant $A^\vee$ et $B = \{b\}$, donc (5.9) est également vérifiée.

On suppose maintenant $\#A, \#B > 1$. Notons $A = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots\}$ et $B = \{\beta_1 < \beta_2 < \dots\}$. De la case initale (α_1, β_1) on va soit en (α_2, β_1) soit en (α_1, β_2). Dans le premier cas, les ensembles de projections sont $(A_\vee, B)$, et dans le deuxième cas $(A, B_\vee)$, à chaque fois la probabilité de tomber sur la case (α_2, β_1) ou (α_1, β_2) depuis (α_1, β_1) étant $\frac{1}{h_\lambda(\alpha_1,\beta_1)-1}$. Par la loi des probabilités totales on a :

$$p(A, B) = \frac{1}{h_\lambda(\alpha_1, \beta_1) - 1} (p(A_\vee, B) + p(A, B_\vee)).$$

Par hypothèse de récurrence, en remarquant que $\max(X_\vee) = \max X$ si $\#X \geq 2$ (en particulier la condition sur le coin est vérifiée) :

$$\begin{aligned}
p(A_\vee, B) &= \frac{1}{n} [h_\lambda(\alpha_1, \max B) - 1] \prod_{i \in A^\vee} \frac{1}{h_\lambda(i, \max B) - 1} \prod_{j \in B^\vee} \frac{1}{h_\lambda(\max A, j) - 1}, \\
p(A, B_\vee) &= \frac{1}{n} \prod_{i \in A^\vee} \frac{1}{h_\lambda(i, \max B) - 1} \times [h_\lambda(\max A, \beta_1) - 1] \prod_{j \in B^\vee} \frac{1}{h_\lambda(\max A, j) - 1},
\end{aligned}$$

donc :

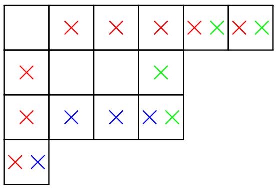
$$\begin{aligned}
p(A_\vee, B) + p(A, B_\vee) = \frac{1}{n} [&h_\lambda(\alpha_1, \max B) - 1 + h_\lambda(\max A, \beta_1) - 1] \\
&\times \prod_{i \in A^\vee} \frac{1}{h_\lambda(i, \max B) - 1} \prod_{j \in B^\vee} \frac{1}{h_\lambda(\max A, j) - 1}.
\end{aligned}$$

On conclut donc la récurrence en utilisant le Lemme 5.10 avec la boîte (α_1, β_1) et le coin $(\max A, \max B)$. $\square$

Lemme 5.10. *Soient $(a, b), (k, \ell) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ avec $a \leq k$ et $b \leq \ell$ et supposons que (k, ℓ) soit un coin de λ. Alors :*

$$h_\lambda(a, \ell) - 1 + h_\lambda(k, b) - 1 = h_\lambda(a, b) - 1.$$

Démonstration. La démonstration peut dans un premier temps se faire sur un exemple, ici avec les boîtes $(a,b)=(1,1)$ et $(k,\ell)=(3,4)$:



On constate en effet qu'il y a autant de croix rouges (éléments de $H_\lambda(k,\ell)\setminus\{(k,l)\}$) que de croix vertes (éléments de $H_\lambda(a,\ell)\setminus\{(a,\ell)\}$) et bleues (éléments de $H_\lambda(k,b)\setminus\{(k,b)\}$) : on fait correspondre les croies bleues horizontales (resp. vertes verticales) avec les rouges du dessus (resp. de gauche).

Revenons maintenant au cas général. Notons $h^v_\lambda(i,j)$ (resp. $h^h_\lambda(i,j)$) le nombre de boîtes sous (resp. à droite) de (i,j), de sorte que $h_\lambda(i,j)=h^v_\lambda(i,j)+h^h_\lambda(i,j)-1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
h^v_\lambda(a,b) &= k-a+h^v_\lambda(k,b),\\
h^h_\lambda(a,b) &= \ell-b+h^h_\lambda(a,\ell).
\end{aligned}$$

Puisque (k,ℓ) est un coin on a :

$$\begin{aligned}
h^v_\lambda(a,\ell) &= k-a+1,\\
h^h_\lambda(k,b) &= \ell-b+1,
\end{aligned}$$

donc on trouve, en croisant les termes :

$$\begin{aligned}
h_\lambda(a,b)+1 &= h^v_\lambda(a,b)+h^h_\lambda(a,b)\\
&= \left[h^v_\lambda(a,\ell)+h^v_\lambda(k,b)-1\right]+\left[h^h_\lambda(\ell,b)+h^h_\lambda(a,\ell)-1\right]\\
&= \left[h^h_\lambda(\ell,b)+h^v_\lambda(k,b)-1\right]+\left[h^v_\lambda(a,\ell)+h^h_\lambda(a,\ell)-1\right]\\
&= h_\lambda(k,b)+h_\lambda(a,\ell),
\end{aligned}$$

et on trouve donc le résultat du Lemme. □

Rappelons maintenant que $\mu=\lambda_{\mathfrak{c}}$, où $\mathfrak{c}=(a,b)$ est un coin de λ. En combinant (5.6) et (5.9), on trouve donc :

$$\frac{d_\mu}{d_\lambda}=\sum_{A\subseteq\{1,\dots,a-1\}}\ \sum_{B\subseteq\{1,\dots,b-1\}} p(A\cup\{a\},B\cup\{b\}).$$

Par somme d'événements disjoints, on en déduit que cette somme est simplement la probablité que la marche en crochets termine sur le coin $\mathfrak{c}=(a,b)$. Puisque la marche en crochets termine nécessairement sur un coin, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu\nearrow\lambda}\frac{d_\mu}{d_\lambda} &= \sum_{\mathfrak{c}\text{ coin de }\mathcal{Y}(\lambda)}\frac{d_{\lambda_{\mathfrak{c}}}}{d_\lambda}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (5.5).

Remarque 5.11. À quoi sert cette formule des équerres ? Rappelons tout d'abord que les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ sont indexées par les partitions de n (via le type d'une permutation, donné par sa décomposition en cycles à supports disjoints). Cela signifie que les représentations complexes irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ peuvent s'indexer par les partitions de n. Plus précisément, on peut construire (explicitement) une famille complète de représentations irréductibles $\{V_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ deux à deux non isomorphes (en tant que représentations), où V_λ possède une base (en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel) indexées par les tableaux standards de forme λ. La formule des équerres donne alors la dimension de V_λ, qui se calcule de manière beaucoup plus rapide que l'énumération des tableaux standards.

Corollaire 5.12. *Soit λ une partition. En tirant un coin $\mathfrak{c}$ via la marche en crochet puis en recommençant avec $\lambda_{\mathfrak{c}}$, on obtient un tableau standard de forme λ tiré uniformément parmi les tableaux standards de forme λ.*

Démonstration. Tout d'abord, le résultat est vrai si $|\lambda| = 1$ puisqu'il y a un unique tableau standard. On suppose maintenant $|\lambda| \geq 2$. D'après ce qui prècede, le coin $\mathfrak{c}$ est tiré avec probabilité $\frac{f_{\lambda_{\mathfrak{c}}}}{f_\lambda}$. Par récurrence, le tableau standard $\mathfrak{t}$ de forme $\lambda_{\mathfrak{c}}$ obtenu par la procédure est tiré uniformément dans les tableaux de forme $\lambda_{\mathfrak{c}}$, donc avec probabilité $\frac{1}{f_{\lambda_{\mathfrak{c}}}}$. Le tableau $\mathfrak{s}$ de forme λ obtenu en prolongeant $\mathfrak{t}$ par $\mathfrak{s}(\mathfrak{c}) := |\lambda|$ est standard puisque $\mathfrak{c}$ est un coin, et est donc tiré avec probabilité :

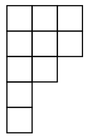
$$\frac{f_{\lambda_{\mathfrak{c}}}}{f_\lambda}\frac{1}{f_{\lambda_{\mathfrak{c}}}} = \frac{1}{f_\lambda},$$

c'est-à-dire uniformément parmi les tableaux standards de forme λ. □

5.2 Identités

Proposition 5.13. *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Il y a autant de partitions de n en m parts que de partitions de n où m est la plus grande part.*

Pour prouver cette proposition, remarquons que l'on dispose d'une involution naturelle sur l'ensemble des diagrammes de Young, donnée par $(r, c) \mapsto (c, r)$. On parle de partition *duale*.

Exemple 5.14. Le diagramme de Young dual de celui de l'Exemple 5.2 est  donc la partition duale de $(5, 3, 2)$ est $(3, 3, 2, 1, 1)$.

On remarque que cette involution est justement ce qu'il faut pour prouver la Proposition 5.13, puisqu'une partition λ possède m parts si et seulement si la plus grande part de sa partition duale est m.

On va maintenant utiliser la théorie des séries formelles pour donner quelques identités sur les partitions. Notons $p(n)$ le nombre de partitions de n et rappelons que $F_l(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)X^n$.

Proposition 5.15. *On a*

$$F_l(p) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - X^k}.$$

Démonstration. Il faut d'abord remarquer que le produit est bien défini en tant que série formelle : c'est clair puisque $\frac{1}{1-X^k} = 1 + X^k + X^{2k} + \dots$, donc modulo X^n le produit est égal à $\prod_{k=1}^{n}(1 + X^k + X^{2k} + \dots)$ qui est bien défini. Le coefficient de X^n est alors

$$\#\left\{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} \alpha_k k = n\right\} = p(n).$$

□

Remarque 5.16. Pour tout $m, n \geq 1$ soit $a_{mn} \in k$ et posons $F_m := 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} X^n$. Si pour tout n l'ensemble $\{m : \mathrm{val}(F_m - 1) \leq n\}$ est fini on peut donner un sens à $\prod_{m=1}^{+\infty} F_m$, avec (où $a_{m0} := 1$) :

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{+\infty} F_m &= \prod_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} X^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{0 \leq n_1, n_2, \ldots \\ n_1 + n_2 + \cdots = n}} \prod_{m=1}^{+\infty} a_{m n_m} \right) X^n.\end{aligned}$$

En particulier, pour chaque $n \geq 1$ il n'existe qu'un nombre fini de m tels que $a_{mn} \neq 0$ (les a_{mn} pour $n = 0$ ne changeant pas la valeur du produit puisque $a_{m0} = 1$).

En fait, on peut munir la k-algèbre des séries formelles de la distance (ultramétrique) $d(F, G) := 2^{-\mathrm{val}(F-G)}$, qui en fait un espace métrique complet, pour lequel $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ et $\prod_{m=1}^{+\infty} F_m = \lim_{M \to +\infty} \prod_{m=1}^{M} F_m$ (où les F_m sont comme avant).

Le résultat suivant fait penser à la Proposition 5.13.

Proposition 5.17. *Il y a autant de partitions de n en entiers impairs que de partitions de n avec toutes les parts distinctes.*

Démonstration. Soit $p_i(n)$ (resp. $p_d(n)$) le nombre de partitions de n en entiers impairs (resp. en parts distinctes). De façon analogue au calcul de $F_l(p)$, on a

$$\begin{aligned}F_l(p_i) &= \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 - X^{2k+1})} \\ &= \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1 - X^{2k}}{1 - X^k} \\ &= \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + X^k) \\ &= F_l(p_d),\end{aligned}$$

donc $p_i = p_d$.

On peut en fait donner une preuve bijective de ce résultat. Une partition de n en entiers impairs est donnée par des entiers $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots$ tels que i apparaît α_i fois pour tout i impair et $n = \sum_i \alpha_i i$. On peut décomposer chaque α_i en base 2 :

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik} 2^k,$$

et la partition de n que l'on obtient en rangeant les éléments $a_{ik} 2^k i$ non nuls pour i impair et $k \in \mathbb{N}$ n'a que des parts distinctes. $\square$

Théorème 5.18 (Partitions d'un entier en parts fixées)**.** *Soient $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Soit $p_\alpha(n)$ le nombre de partitions de n de la forme $(\alpha_1, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_k)$ (où des α_i peuvent éventuellement ne pas apparaître). Alors*

$$p_\alpha(n) = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k : \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_i = n \right\} \sim \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Démonstration. Voir [FGN-An2]. C'est un développement possible. $\square$

Pour la culture, concluons par un résultat difficile.

Théorème 5.19 (Hardy–Ramanujan 1918, Uspensky 1920)**.** *On a l'asymptotique suivante :*

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Références

[CaGe] P. Caldero et J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries.* Calvage & Mounet.

[FrGi] S. Francinou et H. Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Algèbre 1.* Masson.

[FGN-Al1] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS : Algèbre 1.* Cassini.

[FGN-An2] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS : Analyse 2.* Cassini.

[GNW] C. Greene, A. Nijenhuis et H. Wilf, *A Probabilistic Proof of a Formula for the Number of Young Tableaux of a Given Shape*, Advances in Mathematics **31**, 104–109 (1979).

[Per] D. Perrin, *Cours d'algèbre.* Ellipses.