Géométrie affine, euclidienne, projective : exercices

Références :
— Audin, Géométrie. Les exercices ne sont pas corrigés mais il y a des indications à la fin.
— Mercier, Cours de géométrie. Je recommande fortement la lecture complète ! (Au moins un survol.)
La feuille a été initialement conçue par Jérémy Le Borgne.

Exercice 1. (Mercier, Ch. 11–12.) On se place dans le plan affine euclidien. Justifier les résultats élémentaires suivants :

1. La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π.

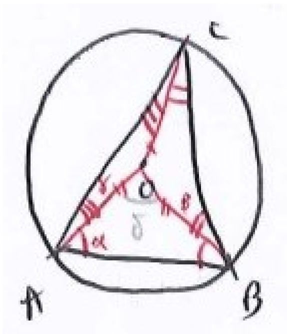
> **Solution:** Dans le triangle ABC, la parallèle à (BC) passant par A définit 3 angles dont la somme vaut π, et qui sont égaux aux angles du triangle (angles alternes-internes ; cette propriété peut se montrer en regardant la symétrie centrale centrée en le centre du segment concerné).

2. La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est $(n-2)\pi$.

> **Solution:** On fixe un point à l'intérieur du polygone et on le relie à ses sommets, définissant ainsi n triangles. La somme des angles de ces triangles vaut $n\pi$, et la somme des angles au centre dans ces triangles vaut 2π, d'où le résultat.

3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B, C trois points de $\mathcal{C}$. On suppose que C est sur le grand arc délimité par A et B. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est $2\widehat{ACB}$ (la notation désigne l'angle géométrique saillant non orienté, dans $[0, \pi]$). Que se passe-t-il si C est sur le petit arc ?

> **Solution:** Version naïve : On se place dans la configuration où C est entre les droites (AO) et (BO). On a $\delta = \pi - 2\alpha$ et $(\alpha+\gamma)+(\gamma+\beta)+(\alpha+\beta) = \pi$ donc $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ donc $\delta = \pi - 2\alpha = 2(\beta+\gamma)$.



Version angles orientés : (Mercier, §11.1.1 Thn 179.) Puisque COA et COB sont isocèles en O on a :

$$\begin{cases} 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \pi \pmod{2\pi} \\ 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \pi \pmod{2\pi} \\ 2(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = -\pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

donc :

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 0 \pmod{2\pi},$$

donc :
$$2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$
Attention car ici les angles peuvent « sortir » du triangle !
Version angles orientés via les nombres complexes : On peut se placer dans le plan euclidien identifié à $\mathbb{C}$, et supposer que $\mathcal{C}$ est le cercle unité et que les affixes de A, B, C sont respectivement $1, e^{ib}, e^{ic}$. L'angle au centre est un argument de e^{ib}, qui vaut $b \pmod{2\pi}$. On $\gamma \coloneqq 2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$. C'est un argument de z^2 où :
$$z \coloneqq \frac{e^{ib}-e^{ic}}{1-e^{ic}} = \frac{e^{i\frac{b+c}{2}}}{e^{i\frac{c}{2}}}\frac{e^{i\frac{b-c}{2}}-e^{-i\frac{b-c}{2}}}{e^{-i\frac{c}{2}}-e^{i\frac{c}{2}}} = e^{i\frac{b}{2}}\frac{\sin((c-b)/2)}{\sin(c/2)}.$$
Ainsi, on a :
$$z^2 = e^{ib}\left(\frac{\sin((c-b)/2)}{\sin(c/2)}\right)^2,$$
donc puisque le carré est un réel positif on en déduit que $\gamma = b$ comme recherché.
Finalement, remarquons que quand C « tend » vers A alors on obtient la valeur de l'angle (de droites) de la tangente au cercle en A (Mercier, *loc. cit.*) En effet, si Δ est la médiatrice de $[AB]$ alors les angles de droites (T_A, AB) et (OA, Δ) sont égaux (remarquer que $T_A \perp (OA)$ et $(AB) \perp \Delta$), et on conclut puisque (OA, Δ) vaut la moitié de l'angle au centre, donc exactement l'angle inscrit.

4. Les médianes d'un triangle sont concourantes (version barycentre et application affine) et chaque médiane sépare le triangle en deux triangles de mêmes aires.

Solution: Version barycentres : On a $\alpha = \mathrm{bar}\{B(1), C(1)\}$, et :
$$G \coloneqq \mathrm{bar}\{A(1), B(1), C(1)\} = \mathrm{bar}\{A(1), \alpha(2)\},$$
donc le centre de gravité G du triangle ABC est sur $[A\alpha]$, qui est la médianes issue de A, avec de plus $AG = 2G\alpha$. De même G est sur $[B\beta]$ et $[C\gamma]$ donc les trois médianes sont concourantes.
Version application affine : la propriété est vraie dans un triangle équilatéral (car les médianes sont les médiatrices, cf. question suivante ; on peut aussi rapidement dire que le triangle équilatéral est de sommets d'affixes $1, j, j^2$, la première médiane est l'axe réel et les autres se déduisent par multiplication par j donc elles se coupent en 0). Il existe une application affine f qui envoie ce triangle équilatéral sur le triangle initial (car trois points non alignés forment un repère affine), et f conserve l'alignement et les milieux donc les médianes sont conservés.

5. Les médiatrices d'un triangle sont concourantes, et leur point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.

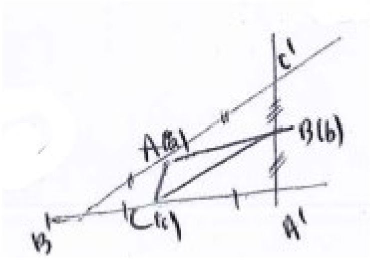
Solution: On rappelle le lemme suivant : si I est le milieu de $[AB]$ alors $MA = MB \iff (MI) \perp (AB)$ (*i.e.* M est sur la médiatrice de $[AB]$). En effet :
$$\begin{aligned} MA = MB &\iff MA^2 = MB^2 \\ &\iff \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &\iff MI^2 + AI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} = MI^2 + IB^2 - \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} \\ &\iff \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} = 0. \end{aligned}$$
Ainsi, si O est le point d'intersection des médiatrices issues de $[AB]$ et $[BC]$, alors $OA = OB$ et $OB = OC$ donc $OA = OC$ donc O est sur la médiatrice de $[AC]$ et les trois médiatrices sont concourantes (en O). L'égalité $OA = OB = OC$ assure que C est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (qui est donc unique car nécessairement le point de concours des médiatrices).

6. Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Solution: Version naïve : Soit H (resp. I) le pied de la hauteur issue de A (resp. B) et soit Ω le point d'intersection des hauteurs (AH) et (BI). On veut montrer que (ΩC) est la hauteur issue de C. On a $(\Omega A) \perp (BC)$ et $(\Omega B) \perp (AC)$ donc :

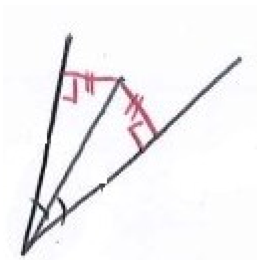
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega C} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{\Omega A} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}\right) \\
&= \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A\Omega} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Version astucieuse : On construit un triangle $A'B'C'$ tel que A est le milieu de $[B'C']$ etc. Un tel triangle existe bien car la matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible (c'est $\frac{1}{2}(J - I)$, et J est de rang 1 et de trace 3 donc son spectre est $\{0, 3\}$). De plus, par le théorème de Thalès on a $(A'B')$ et (AB) parallèles (etc.), donc on conclut que les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$.



7. Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes, et leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Solution: Rappelons la propriété suivante : un point M est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$ si et seulement si $d\big(M, (AB)\big) = d\big(M, (AC)\big)$ (il suffit d'utiliser la formule sinus $= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$).



Ainsi, si Ω est sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$ alors $d\big(\Omega, (BC)\big) = d\big(\Omega, (AB)\big) = d\big(\Omega, (AC)\big)$ donc Ω est également sur la bissectrice de $\widehat{BCA}$. L'égalité des distances montre que Ω est le centre du cercle inscrit (et que le cercle inscrit est intérieur au triangle et tritangent).

8. Démontrer le théorème de Pythagore.

Solution: Soit $\alpha = \widehat{BAC}$. On a :

$$\begin{aligned}
BC^2 = AB^2 + AC^2 &\iff BC^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 - 2\cos\big(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\big) \\
&\iff BC^2 = BC^2 - 2\cos(\pi - \alpha) \\
&\iff \cos(\alpha) = 0 \\
&\iff \alpha = \frac{\pi}{2} \\
&\iff \text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A.
\end{aligned}$$

9. Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors pour tout point M on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + AB^2/2$ (théorème de la médiane).

> **Solution:** De la formule $\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$ (identité du parallélogramme) on en déduit, en prenant $x \coloneqq \overrightarrow{AM}$ et $y \coloneqq \overrightarrow{MB}$:
>
> $$2MI^2 + AB^2 = 2\big(MA^2 + MB^2\big).$$

Exercice 2. (Mercier, §12.4.) Soit ABC un triangle non aplati. On note a, b, c les longueurs des côtés $[BC], [AC], [AB]$ et α, β, γ les angles aux sommets A, B, C. On note G, H, I, O respectivement le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit de ABC.

On se place dans le repère barycentrique ABC.

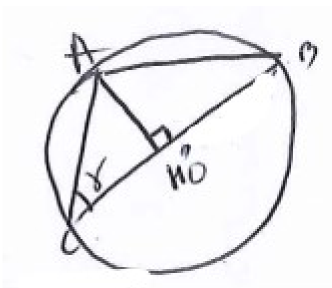
1. Donner un système de coordonnées barycentriques de G.

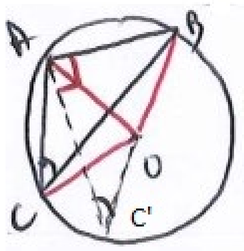
> **Solution:** On a $G = \mathrm{bar}\big\{A(1), B(1), C(1)\big\}$.

2. Montrer qu'un système de coordonnées barycentriques de I est (a, b, c). (Mercier, Thm 165.)

> **Solution:** Soit $I' \coloneqq \mathrm{bar}\big\{(A(a), B(b), C(c)\big\}$. On a $\overrightarrow{AI'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ où :
>
> $$\overrightarrow{AM} \coloneqq \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB},$$
> $$\overrightarrow{AN} \coloneqq \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$
>
> Or $AM = AN = \frac{bc}{a+b+c}$ donc le parallélogramme $MANI'$ est un losange. Ainsi, on a $\widehat{AI'M} = \widehat{NI'A}$ donc I' est sur la bissectrice de $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Par symétrie, le point I' est également sur les bissectrices issues de B et C donc $I' = I$.

3. (a) (Audin, Ex. III.13 et Mercier, Thm 191.) Justifier que $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{2S}$, où R est le rayon du cercle circonscrit et S l'aire de ABC.

> **Solution:** Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et $\gamma = \widehat{ACB}$.
>
> 
>
>
> On a :
>
> $$S = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{aAH}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}.$$
>
> Ainsi, par symétrie on obtient :
>
> $$2S = ab\sin\gamma = ac\sin\beta = bc\sin\alpha,$$
>
> donc :
>
> $$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\gamma}{\gamma} = \frac{\sin\beta}{\beta} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$
>
> Si maintenant C' est le point du cercle circonscrit diamétralement opposé à B, par le théorème de l'angle inscrit (cf. Exo 1.3) on a $\widehat{ACB} = \gamma = \widehat{AC'B}$ et $\widehat{BAC'} = \frac{\pi}{2}$.



Via le triangle ABC' on a donc $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$ donc $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$.

(b) Montrer qu'un système de coordonnées barycentriques de H est $(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$.

Solution: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ de somme non nulle tels que $H = \mathrm{bar}\big\{A(x), B(y), C(z)\big\}$. En supposant ABC non rectangle, on a $x, y, z \neq 0$ (si ABC est rectangle en A alors $y = z = 0$). On a :

$$\begin{cases} (x+y+z)\overrightarrow{AH} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\text{donc } y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ &\text{donc } (-yc\cos\beta + zb\cos\gamma)a = 0 \\ &\text{donc } -yc\cos\beta + zb\cos\gamma = 0. \end{aligned}$$

Puisque $z \neq 0$, quitte à prendre des points x, y, z proportionnels on peut supposer que $z = \tan\gamma$. On obtient donc :

$$y = \frac{zb\cos\gamma}{c\cos\beta} = \frac{b\sin\gamma}{c\cos\beta},$$

donc via la relation des sinus de a) :

$$y = \frac{b\sin\beta}{b\cos\beta} = \tan\beta,$$

et de même on obtient $x = \tan\alpha$.

4. (Audin, Ex. III.14.) Montrer qu'un système de coordonnées barycentriques de O est $(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$. (On pourra noter que O est l'orthocentre d'un triangle remarquable.)

Solution: Version naïve (comme avant) : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ de somme non nulle tels que $O = \mathrm{bar}\big\{A(x), B(y), C(z)\big\}$. Si $x = 0$ alors O est sur (BC) donc est nécessairement le milieu de $[BC]$ (puisque O est sur la médiatrice) et donc $y = z = 1$ et ABC est rectangle en A. On suppose donc maintenant $x \neq 0$, en particulier le triangle ABC n'est pas rectangle en A. On a, par le théorème de l'angle inscrit-angle au centre :

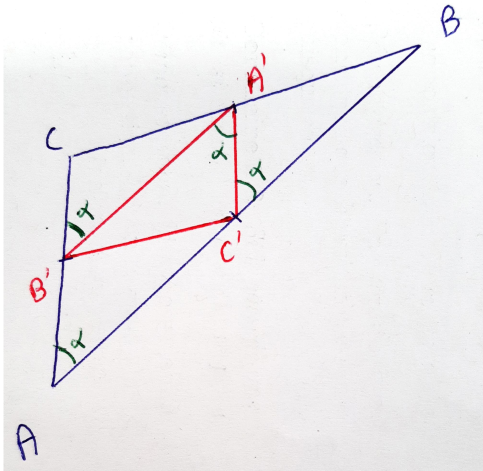
$$\begin{aligned} x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \; &\text{donc } x\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \\ &\text{donc } xR^2 \sin\big(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\big) + yR^2 \sin\big(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\big) = 0 \\ &\text{donc } x\sin 2\beta - y\sin 2\alpha = 0 \\ &\text{donc } x\sin 2\beta = y\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Par symétrie, on a également $x\sin 2\gamma = z\sin 2\alpha$. Puisque ABC n'est pas rectangle en A, on a $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ donc puisque on a également $x \neq 0$ on peut supposer, quitte à prendre des x, y, z proportionnels, que $x = \sin 2\alpha$. On obtient donc :

$$y = \frac{x\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \sin 2\beta,$$

et de la même façon $z = \sin 2\gamma$.

Version astucieuse : Comme on l'a remarqué dans la deuxième version de l'Exercice 1.6, le point O est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$ où A' est le milieu de $[BC]$ etc. Remarquons que les angles sont inchangés, *i.e.* $\alpha' = \alpha$ etc. via les angles alternes-internes.



On a donc, puisque $A' = \mathrm{bar}\{B(1), C(1)\}$ etc. :

$$\begin{aligned} O &= \mathrm{bar}\{A'(2\tan\alpha), B'(2\tan\beta), C'(2\tan\gamma)\} \\ &= \mathrm{bar}\{B(\tan\alpha), C(\tan\alpha), A(\tan\beta), C(\tan\beta), A(\tan\gamma), B(\tan\gamma)\} \\ &= \mathrm{bar}\{A(\tan\beta + \tan\gamma), B(\tan\alpha + \tan\gamma), C(\tan\alpha + \tan\beta)\} \end{aligned}$$

De la formule de duplication $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ on en déduit :

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tan\alpha + \tan\beta,$$

et pour nous $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ donc $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma$. On a donc :

$$\begin{aligned} \tan\alpha + \tan\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ &= \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \\ &= \frac{\sin(2\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}, \end{aligned}$$

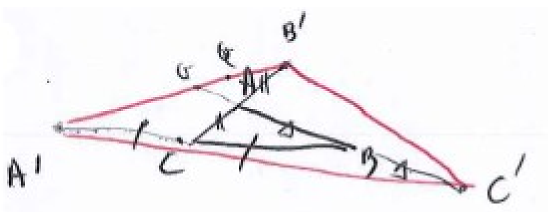
et donc finalement :

$$O = \mathrm{bar}\{(A(\sin 2\gamma), B(\sin 2\beta), C(\sin 2\gamma)\}.$$

Exercice 3. (Mercier, §18.2.1 Application 2.) Soit ABC un triangle non aplati dans le plan affine euclidien. On considère les points A', B', C' obtenus respectivement comme le symétrique de B par rapport à C, de C par rapport à A, et de A par rapport à B.

1. Le triangle $A'B'C'$ peut-il être aplati ?

Solution: On a $A' \in (BC)$ et $B' \in (AC)$ et $C' = (AB)$ donc $A'B'C'$ est aplati si et seulement si A', B', C' sont alignés si et seulement si $(BC) = (AC) = (AC)$ si et seulement si ABC est aplati. Donc $A'B'C'$ n'est pas aplati !



2. Exprimer les coordonnées barycentriques de A, B, C dans le repère $A'B'C'$.

Solution: On a :

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{bar}\{B'(4), C(4)\} \\ &= \mathrm{bar}\{B'(4), A'(2), B(2)\} \\ &= \mathrm{bar}\{B'(4), A'(2), A(1), C'(1)\} \\ &= \mathrm{bar}\{A'(2), B'(4), C'(1)\}. \end{aligned}$$

(On peut bien enlever le $A(1)$, cf. $2\overrightarrow{AA'} + 4\overrightarrow{AB'} + \lambda\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{0}$.) Si on applique la permutation $A \to B \to C \to A$, alors (BC) devient (CA) donc A' devient B' etc. donc :

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{bar}\{A'(1), B'(2), C'(4)\}, \\ C &= \mathrm{bar}\{A'(4), B'(1), C'(2)\}. \end{aligned}$$

3. Exprimer l'aire de $A'B'C'$ en fonction de celle de ABC.

Solution: Soient $\gamma := \widehat{ACB}$ et $\gamma' := \widehat{A'CB}$. On a $\gamma + \gamma' = \pi$ donc $\sin(\gamma') = \sin(\pi - \gamma) = \sin(\gamma)$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{aire}(A'CB') &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA'} \wedge \overrightarrow{CB'}\| \\ &= CA' \cdot \frac{CB'}{2}|\sin\gamma'| \\ &= CB \cdot CA|\sin\gamma| \\ &= \|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA}\| \\ &= 2\,\mathrm{aire}(ACB). \end{aligned}$$

Par symétrie il en est de même pour les triangles $A'BC'$ et $B'AC'$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{aire}(A'B'C') &= \mathrm{aire}(ABC) + \mathrm{aire}(A'CB') + \mathrm{aire}(A'BC') + \mathrm{aire}(B'AC') \\ &= \mathrm{aire}(ABC) + 3 \cdot 2\,\mathrm{aire}(ABC) \\ &= 7\,\mathrm{aire}(ABC). \end{aligned}$$

4. Proposer une méthode pour reconstruire A, B, C à partir de A', B', C'. On pourra chercher les coordonnées barycentriques des points d'intersection des côtés de ABC avec ceux de $A'B'C'$.

Solution: 3-en-1 : avec la relation $A = \mathrm{bar}\{A'(2), B'(4), C'(1)\}$, on obtient :

$$7\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OA'} + 4\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'},$$

ce qui permet de construire A (où O est le centre du repère), par exemple coordonnée par coordonnée.
Avec un point intermédiaire : On suppose qu'on sait seulement placer le barycentre de deux points. Si $G := \mathrm{bar}\{A'(2), B'(4)\}$ (comme sur le dessin de la question 1) alors $A = \mathrm{bar}\{G(6), C'(1)\}$, et on place G avec la relation $6\overrightarrow{A'G} = 4\overrightarrow{A'B}$ puis A avec $7\overrightarrow{C'A} = 6\overrightarrow{C'G}$.

5. Retrouver les résultats précédents en étudiant le cas d'un triangle équilatéral.

Solution: On traite d'abord le cas d'un triangle équilatéral. Par symétrie (de rotation), les trois triangles $A'CB', A'BC'$ et $B'AC'$ ont la même aire, et il suffit donc de montrer que $\mathrm{aire}(A'BC') = 2\,\mathrm{aire}(ABC)$. On donne deux versions :

— Soit x la longueur des côtés de ABC. Alors $A'B = x$ et il suffit de montrer que la longueur de la hauteur de $A'BC'$ issue de C' est le double de la hauteur de ABC. Mais la hauteur issue de C' vaut $2x\sin\frac{\pi}{3}$ et celle de ABC vaut $x\sin\frac{\pi}{3}$, ce qui conclut.

— Il suffit de montrer que aire$(A'BA)$ = aire$(A'AC')$ = aire(ABC). Mais $A'BA$ est obtenu de ABC par la symétrie oblique d'axe (AB) et de direction (BC) (i.e. affinité d'axe (AB), de direction (BC) et de rapport -1) et quand à $A'AC$ il est obtenu par une symétrie oblique d'axe (AB) et de direction (BC), alors que ACC' est lui-même obtenu de ABC par la symétrie oblique d'axe (AC) et de direction (AB). On conclut puisque à chaque fois le déterminant de la symétrie oblique est ± 1 et que les aires sont multipliées par sa valeur absolue.

On peut ensuite envoyer ce triangle sur un triangle quelconque avec une application affine f (comme dans une version de l'Exercice 1.4), les aires sont multipliées par $|\det f|$ (donc rien ne change dans les égalités) et les barycentres sont conservés.

Exercice 4. On se place dans le plan affine sur un corps K.

1. Soient A, B, A', B' quatre points non alignés du plan. Montrer que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles si et seulement s'il existe une homothétie ou une translation transformant A en A' et B en B'. Montrer qu'une telle transformation est unique.

Solution: Remarquons que la réciproque est immédiate : s'il existe une application affine f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ alors (AB) est parallèle à $h\big((AB)\big) = (A'B')$.

Pour le sens direct, on distingue deux cas. On suppose d'abord que $(AA') \cap (BB') \neq \emptyset$, c'est-à-dire (AA') et (BB') ne sont pas parallèles. Soit I le point d'intersection et soit h l'homothétie de centre I qui envoie A sur A'. Puisque h est affine, on sait que l'image de (AB) passe par A' et est parallèle à (AB). Ainsi, si (AB) et $(A'B')$ sont parallèles alors $h\big((AB)\big) = (A'B')$ donc $h(B) \in (A'B')$, mais puisque $h(B) \in (IB)$ on en déduit que $h(B) \in (A'B') \cap (IB) = B'$. L'homothétie h est l'unique homothétie qui envoie A sur A' et B sur B' car si h' est une homothétie vérifiant cette propriété alors nécessairement h' est de centre $(AA') \cap (BB') = \{I\}$ donc h et h' coïncident sur les trois points non alignés A, B, I donc $h = h'$.

Si maintenant $(AA') \cap (BB') = \emptyset$ (c'est bien l'unique cas restant puisque $(AA') = (BB')$ est impossible puisque A, A', B, B' ne sont pas alignés), c'est-à-dire (AA') et (BB') sont parallèles, soit u tel que $A' = A+u = t_u(A)$. Puisque t_u est une translation on a $t_u\big((AB)\big)$ parallèle à (AB) et passe par A' donc $t_u(B) \in (A'B')$. Or puisque (AA') et (BB') sont parallèles, on a $t_u(B) \in (BB')$. Finalement, on a $t_u(B) \in (A'B') \cap (BB') = \{B\}$.

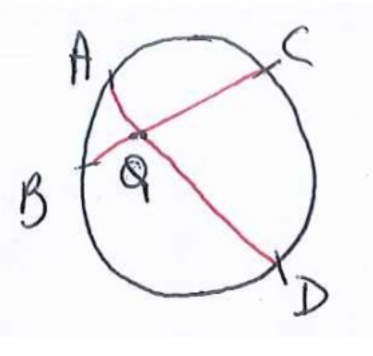
2. Quel résultat élémentaire de géométrie euclidienne retrouve-t-on ?

Solution: Le théorème de Thalès et le fait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.

3. (Mercier, Thm 172.) Soient A, B, C, D quatre points cocycliques, et Q le point d'intersection de (AD) et (BC) (s'il existe). Montrer l'égalité des rapports de longueurs :

$$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{DC}.$$

Solution: On considère d'abord le cas où Q est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ défini par A, B, C, D :



On va montrer que les triangles QAB et QDC sont semblables. En effet, on a $\widehat{AQB} = \widehat{CQD}$ et par le théorème de l'angle inscrit (les $*$) on a :

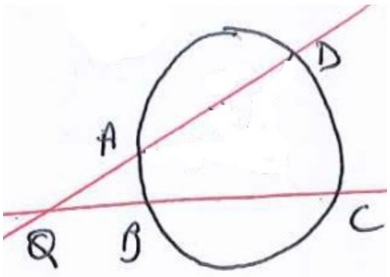
$$\widehat{BAQ} = \widehat{BAD} \overset{*}{=} \widehat{BCD} = \widehat{QCD},$$

et donc automatiquement $\widehat{ABQ} = \widehat{QDC}$. On en déduit que (puisque QCD est obtenu de QAB par une rotation et dilatation) :

$$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD},$$

comme recherché.

On suppose maintenant que Q est à l'extérieur de $\mathcal{C}$:



On va montrer que les triangles QAB et QCD sont semblables. En effet, par le théorème de l'angle inscrit on a :

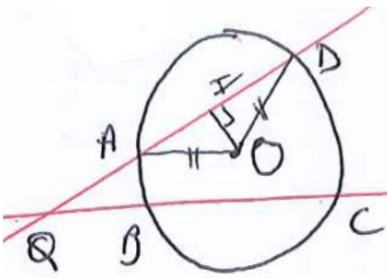
$$\widehat{QCD} = \widehat{BCD} = \pi - \widehat{BAD} = \widehat{QAB},$$

et donc automatiquement $\widehat{QDC} = \widehat{QBA}$. On conclut donc que :

$$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD},$$

comme annoncé.

On peut faire ici une petite remarque : on peut montrer que $\overline{QA} \cdot \overline{QD} = \overline{QB} \cdot \overline{QC} = QO^2 - r^2$ (« puissance d'un cercle par rapport à un point »), en particulier cette quantité ne dépend pas de la droite passant par Q coupant $\mathcal{C}$. Remarquons que si Q est à l'extérieur de $\mathcal{C}$ alors $QO^2 - r^2 = QT^2$ où T est le point de tangence d'une droite passant par Q tangente à $\mathcal{C}$, et si Q est à l'intérieur alors $QO^2 - r^2 = d(Q, \mathcal{C})^2$. Pour prouver cette propriété de puissance, on introduit le milieu I de $[AD]$ et on utilise Pythagore :

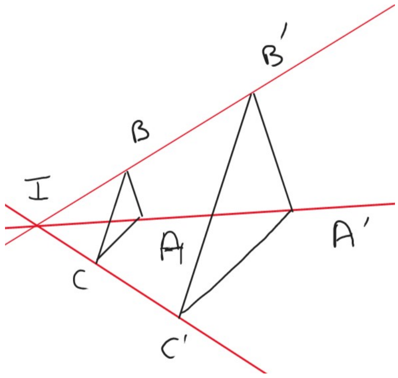


$$\begin{aligned}
\overline{QA} \cdot \overline{QD} &= \left(\overline{QI} + \overline{IA}\right)\left(\overline{QI} + \overline{ID}\right) \\
&= \left(\overline{QI} - \overline{ID}\right)\left(\overline{QI} + \overline{ID}\right) \\
&= QI^2 - ID^2 \\
&= QO^2 - IO^2 - \left(OD^2 - IO^2\right) \\
&= QO^2 - r^2.
\end{aligned}$$

Exercice 5. (Théorème de Desargues, version faible)
(Audin, Thm 1.4.6 et Exo I.60.) On se place dans le plan affine sur un corps K.

1. Soient ABC, $A'B'C'$ deux triangles non aplatis sans sommet commun. On suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ (resp. (AC) et $(A'C')$, (BC) et $(B'C')$) sont parallèles. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Solution: (Pour le dessin, commencer par tracer les trois droites concourantes (cf. réciproque pour la forme forte).)

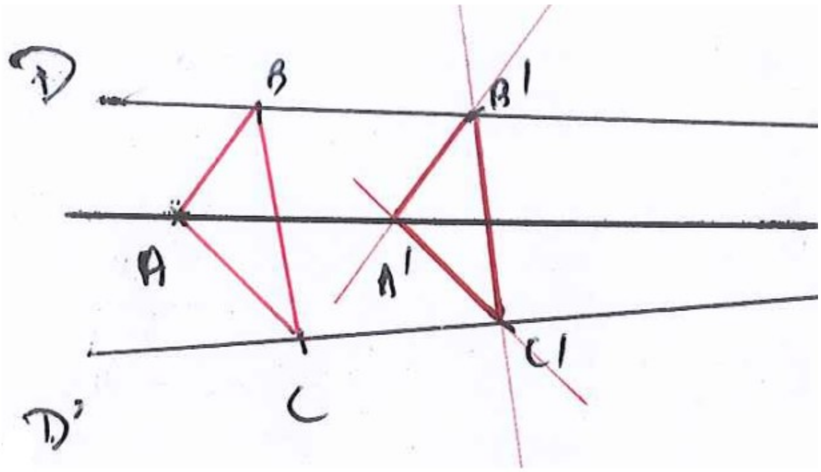


Si $(AA') = (BB')$ alors l'énoncé est trivial. On suppose d'abord que $(AA') \cap (BB') \neq \emptyset$ et soit I le point d'intersection. Soit h l'homothétie de centre I qui envoie I sur A'. Puisque (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, on a $h\big((AB)\big) = (A'B')$ donc $h(B) \in (IB) \cap (A'B')$ donc $h(B) = B'$. Ainsi, puisque (AC) et $(A'C')$ (resp. (BC) et $(B'C')$) sont parallèles on a $h(C) \in (A'C') \cap (B'C')$ donc $h(C) = C'$, donc $I \in (CC')$.
Si maintenant $(AA') \cap (BB') = \emptyset$, alors (AA') et (BB') sont parallèles et nécessairement (AA') et (CC') sont aussi parallèles car sinon par le point précédent les trois droites seraient concourantes.

2. On dessine sur une feuille deux droites D et D', non parallèles, telles que le point d'intersection de D et D' soit en dehors de la feuille. On se donne aussi un point A situé entre D et D'. Proposer une construction basée sur le théorème de Desargues pour construire la droite passant par A et le point d'intersection de D et D'.

Solution:

1. On place un point B sur D et un point C sur D'.
2. On trace une parallèle à (BC), que l'on nomme $(B'C')$ où B' (resp. C') est l'intersection avec D (resp. D').
3. On trace une parallèle à (AB) (resp. (AC)) passant par B' (resp. C').
4. La droite (AA') où A' est l'intersection des deux droites précédentes convient.



En effet, les hypothèses du théorèmes de Desargues sont bien vérifiées puisque (AB) et $(A'B')$ sont parallèles (etc.) par construction, et la droite finale passe par le point d'intersection de $D = (BB')$ et $D' = (CC')$.

Exercice 6. (Théorème de Ménélaüs)
(Mercier, Thm 44 et §3.2.5.) On se place dans le plan affine sur un corps K. Soit ABC un triangle non aplati et A', B', C' des points situés respectivement sur les droites $(BC), (AC), (AB)$ et distincts de A, B, C.

1. Exprimer les coordonnées barycentriques de A', B', C' dans le repère ABC en fonction des rapports algébriques de longueurs $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$, $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

Solution: Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (BC) alors :

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\overline{A'B}}\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{\overline{A'C}}\overrightarrow{A'C},$$

donc :

$$\overrightarrow{A'B} - \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0},$$

donc, avec $\alpha \coloneqq \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$,

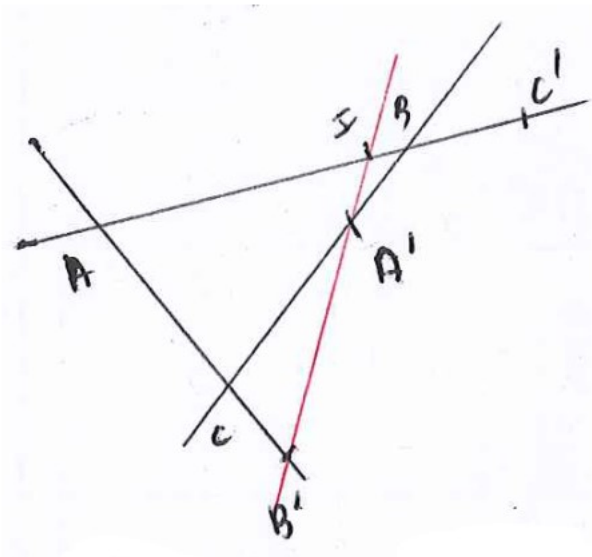
$$A' = \mathrm{bar}\{B(1), C(-\alpha)\}.$$

Remarquons que l'on a bien $1-\alpha \neq 0$ car $1-\alpha = 0 \iff \overline{A'B} = \overline{A'C} \iff B = C$, ce qui est exclus par hypothèse. De même, avec $\beta \coloneqq \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\gamma \coloneqq \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ on a :

$$B' = \mathrm{bar}\{C(1), A(-\beta)\} \qquad \text{et} \qquad C' = \mathrm{bar}\{A(1), B(-\gamma)\}.$$

2. Déterminer les coordonnées barycentriques du point d'intersection de $(A'B')$ et (AB), s'il existe.

Solution: Soit I le point d'intersection.



Puisque $A' \neq B$ on a $A' \notin (AB)$ donc $I \neq A'$ donc il existe $x \neq -1$ tel que :

$$I = \mathrm{bar}\{A'(x), B'(1)\}.$$

Par la question précédente, on obtient :

$$I = \mathrm{bar}\left\{B\left(\frac{x}{1-\alpha}\right), C\left(\frac{-\alpha x}{1-\alpha}\right), C\left(\frac{1}{1-\beta}\right), A\left(\frac{-\beta}{1-\beta}\right)\right\}.$$

Or, puisque $I \in (AB)$, le poids associé au point C est nécessairement nul donc :

$$\frac{-\alpha x}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{1-\alpha}{\alpha(1-\beta)}.$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{bar}\left\{B\left(\frac{1}{\alpha(1-\beta)}\right), A\left(\frac{-\beta}{1-\beta}\right)\right\} \\ &= \mathrm{bar}\{B(1), A(-\alpha\beta)\}. \end{aligned}$$

3. En déduire que A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Solution: Les points A', B', C' sont alignés ssi $C' = I$ ssi $I = \mathrm{bar}\{B(-\gamma), A(1)\}$ par la question 1 donc :

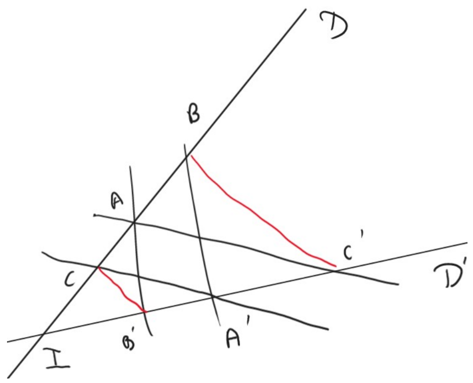
$$\begin{aligned} A', B', C' \text{ alignés} &\iff \gamma^{-1} = \alpha\beta \\ &\iff \alpha\beta\gamma = 1, \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'égalité recherchée.
On peut aussi démontrer directement ce résultat en passant par le groupe des homothéties-translations. Soit h_A (resp. h_B, h_C) l'homothétie de centre A' (resp. B', C') qui envoie C sur B (resp. A sur C et B sur A), qui est de rapport α (resp. β, γ). Alors $h := h_A h_B h_C$ est une homothétie-translation qui fixe A donc c'est une homothétie, de rapport $\alpha\beta\gamma$ le produit des rapports.
Notons que $h_B h_C$ stabilise la droite $(B'C')$ puisque $(B'C')$ passe par les centres de h_B et h_C, et h_A stabilise $(B'C')$ ssi A', B', C' alignés (puisque h_A n'est pas l'identité puisque $B \neq C$). On en déduit que A', B', C' alignés ssi h stabilise $(B'C')$ ssi A, B', C' alignés ou h est l'identité ssi h est l'identité ssi h est de rapport 1 ce qui conclut. (En effet, on a A, B', C' alignés ssi $(AB') = (AC')$ ssi $(AC) = (AB)$ ssi A, B, C alignés ce qui est proscrit.)

Exercice 7. (Théorème de Pappus) (Audin, Thm I.4.5.)

1. On se place dans le plan affine sur un corps K. Soient D, D' deux droites concourantes, et A, B, C (respectivement A', B', C') des points de D (resp. D') deux à deux distincts. On suppose que $(AB') \mathbin{/\!/} (A'B)$ et $(AC') \mathbin{/\!/} (A'C)$. Montrer que $(B'C) \mathbin{/\!/} (C'B)$.

Solution: Soit I le point d'intersection des droites D et D'.

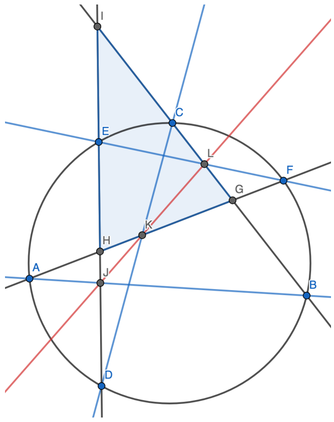


Soit g (resp. h) l'homothétie de centre I qui envoie A sur B (resp. A sur C). Par le théorème de Thalès, on sait que $g(B') = A'$ et $h(C') = A'$. L'homothétie $f := hg^{-1}$ est de centre I et envoie B sur C. De plus, puisque g et h sont deux homothéties de même centre, elles commutent (cf. homothétie sur une droite !) donc $f = g^{-1}h$ envoie C' sur B'. Finalement, on trouve bien que (BC') et $(B'C)$ sont parallèles.

2. On se place maintenant dans le plan projectif sur K. Soient D, D' deux droites distinctes, et A, B, C (respectivement A', B', C') des points de D (resp. D'). En utilisant la question précédente, retrouver le théorème de Pappus qui affirme que les points d'intersection respectifs P, Q, R de (AB') et (BA'), (BC') et $(B'C)$, (AC') et (CA') sont alignés.
3. On pourra proposer une démonstration purement affine de ce théorème, en appliquant 5 fois le théorème de Ménélaüs (voir aussi l'exercice 8)...

Exercice 8. (Hexagramme de Pascal)
(Audin, Exercice III.48 et Thm VII.4.4, Mercier, Thm 178.) On se place dans le plan affine euclidien.

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ et six points A, B, C, D, E, F sur $\mathcal{C}$ tel que l'hexagone $ABCDEF$ n'a pas de côtés parallèles. On considère les points d'intersection J, K, L obtenus en reliant les côtés opposés de l'hexagone $ABCDEF$. On note de plus G, H, I les intersections respectives de (AF) et (BC), (AF) et (DE), (BC) et (DE).



   (a) Donner les trois relations obtenues en appliquant le théorème de Ménélaüs dans le triangle GHI avec les transversales (AB), (CD) et (EF).

Solution:
— On a $J \in (AB)$ donc A, B, J sont alignés. Or, on a $G, H \in (AF)$ donc $A \in (GH)$, de même $G, I \in (BC)$ donc $B \in (GI)$ et $J = (AB) \cap (DE)$ donc $J \in (HI)$ puisque $(DE) = (HI)$ puisque $H, I \in (DE)$. Ainsi, le théorème de Ménélaüs donne :

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AH}} \frac{\overline{JH}}{\overline{JI}} \frac{\overline{BI}}{\overline{BG}} = 1.$$

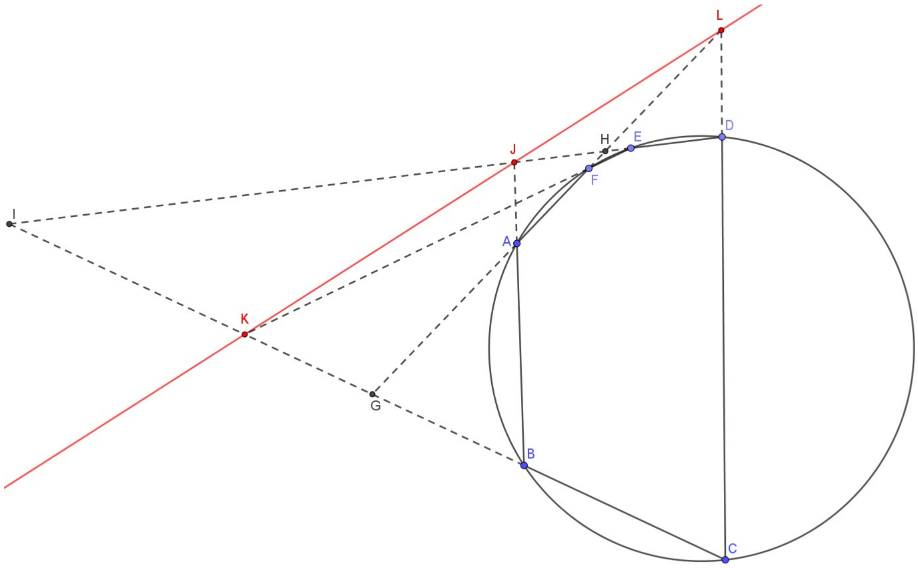
(Pour trouver l'ordre, on remarque que la lettre du triangle en haut est la lettre en bas d'avant.)

— De même, on a $L \in (CD)$ donc C, D, L sont alignés, et $C \in (GI), D \in (HI)$ et $L \in (GH)$ donc :

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CG}} \frac{\overline{DH}}{\overline{DI}} \frac{\overline{LG}}{\overline{LH}} = 1.$$

— De même, on a $K \in (EF)$ donc E, F, K sont alignés, et $E \in (HI), F \in (GH)$ et $K \in (GI)$ donc :

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EI}} \frac{\overline{KI}}{\overline{KG}} \frac{\overline{FG}}{\overline{FH}} = 1.$$



   (b) En utilisant ces relations et la question 3 de l'exercice 4 (en version « puissance d'un point par rapport à un cercle »), démontrer que

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{JI}} \frac{\overline{LG}}{\overline{LH}} \frac{\overline{KI}}{\overline{KG}} = 1.$$

Solution: En faisant le produit des trois relations précédentes en omettant les termes en rouges (qui sont les termes du produit recherché), on obtient :

$$\begin{aligned} p &\coloneqq \frac{\overline{AG}}{\overline{AH}}\frac{\overline{BI}}{\overline{BG}} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{CG}}\frac{\overline{DH}}{\overline{DI}} \cdot \frac{\overline{EH}}{\overline{EI}}\frac{\overline{FG}}{\overline{FH}} \\ &= \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}}\frac{1}{\overline{AH}}\overline{BI} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}\frac{1}{\overline{CG}}\overline{DH} \cdot \frac{\overline{EH}}{\overline{FH}}\frac{1}{\overline{EI}}\overline{FG}. \end{aligned}$$

La puissance de G par rapport au cercle donne $\overline{GA} \cdot \overline{GF} = \overline{GB} \cdot \overline{GC}$ donc :

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} \cdot \frac{1}{\overline{CG}}\overline{FG} = 1,$$

donc on obtient :

$$p = \frac{1}{\overline{AH}}\overline{BI} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}\overline{DH} \cdot \frac{\overline{EH}}{\overline{FH}}\frac{1}{\overline{EI}}.$$

La puissance de H par rapport au cercle donne $\overline{HF} \cdot \overline{HA} = \overline{HE} \cdot \overline{HD}$ donc :

$$1 = \frac{1}{\overline{AH}}\overline{DH}\frac{\overline{EH}}{\overline{FH}},$$

donc on obtient :

$$p = \overline{BI} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}\frac{1}{\overline{EI}}.$$

La puissance de I par rapport au cercle donne $\overline{IC} \cdot \overline{IB} = \overline{ID} \cdot \overline{IE}$ donc $p = 1$. Cela montre donc que le produit des trois fractions en rouge vaut 1 également.

(c) En déduire que J, K, L sont alignés.

Solution: C'est la réciproque du théorème de Menelaüs.

2. Comment ce théorème se généralise-t-il dans le plan projectif lorsqu'on fait agir $PGL_3(\mathbb{R})$ sur la figure précédente ?

Solution: Le cercle est remplacé par une conique.

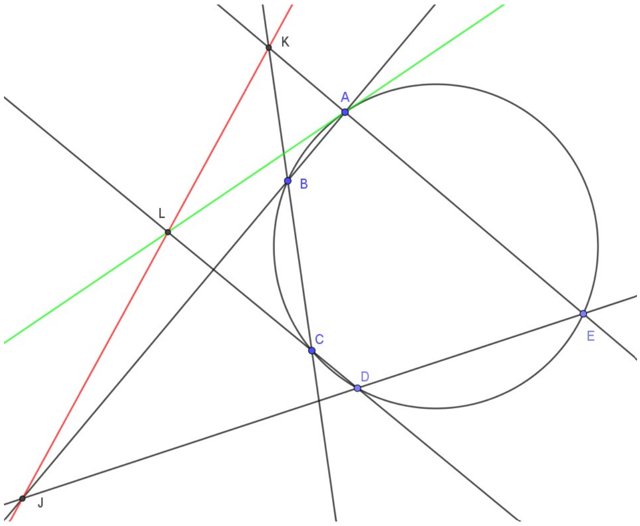
3. Justifier que le théorème de Pappus est un cas particulier du résultat précédent.

Solution: C'est quand la conique est une hyperbole dégénérée.

4. Proposer une méthode pour construire la tangente à une conique en l'un de ses points basée sur ce théorème.

Solution: L'idée est de prendre deux points confondus.

1. On place cinq points $B, C, D, E, F = A$ sur la conique.
2. On place $J = (AB) \cap (DE)$ et $K = (BC) \cap (FE)$.
3. On place $L = (JK) \cap (BC)$.
4. La droite (LA) est la tangente recherchée.



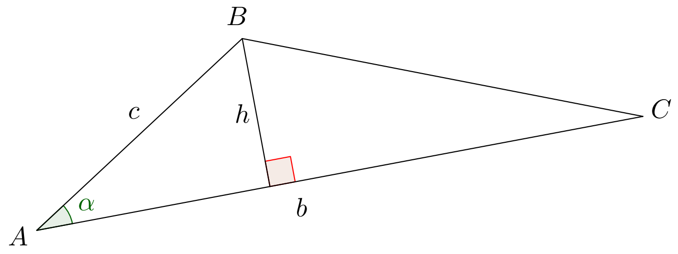
De même, étant donné cinq points en position générale, ce théorème permet de montrer qu'il existe une unique conique passant par ces cinq points, en construisant la conique point par point.

Exercice 9. (Homologies et théorème de Desargues)
(Audin, Thm VI.33.) On se place dans l'espace projectif $P(E)$ associé à un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K. On appelle *homologie* une homographie $h \in PGL(E)$ dont l'application linéaire sous-jacente est une dilatation.

1. Montrer que si h est une homologie qui n'est pas l'identité, il existe un unique hyperplan projectif de points fixes de h et un unique autre point fixe en dehors de cet hyperplan.
Ces objets s'appellent respectivement la base (l'axe en dimension 2) et le sommet de l'homologie.
2. Soit h une homologie de base H et de sommet S.
   (a) Soit D une droite projective passant par S. Justifier que D est laissée globalement invariante par h.
   (b) On suppose donnés S, H ainsi qu'un point A et son image A' par h. Montrer que si $B \in P(E)$ n'est pas sur la droite (SA), alors l'image de B par h est le point d'intersection de (SB) avec $(A'Q)$, où Q est le point d'intersection de (AB) avec H.
3. On se place désormais dans le plan projectif $P^2(K)$. Soient D une droite projective, $S \notin D$ un point, et $A, A' \notin \{S\} \cup D$ tels que S, A et A' soient alignés. Montrer qu'il existe une unique homologie h de centre S et d'axe D telle que $h(A) = A'$.
4. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis et sans sommet commun du plan projectif. On suppose que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en S.
   (a) Soient $P = (AB) \cap (A'B')$ et $Q = (AC) \cap (A'C')$. Soit $D = (PQ)$. Montrer qu'il existe une unique homologie de centre S et d'axe D qui envoie A sur A', et montrer qu'elle envoie B sur B' et C sur C'.
   (b) En déduire que $R = (BC) \cap (B'C') \in D$.
5. On reprend les notations de la question précédente, mais on suppose cette fois que P, Q, R sont alignés sur une droite D'.
   (a) On note S' le point d'intersection de (AA') et (BB'). Montrer qu'il existe une unique homologie de centre S' et d'axe D' qui envoie A sur A'.
   (b) Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en S
6. En déduire le théorème de Desargues :
Soient ABC, $A'B'C'$ deux triangles non aplatis de $P^2(K)$ sans sommet commun. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe une homologie h telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$;
   (ii) Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ;
   (iii) Les points $P = (AB) \cap (A'B')$, $Q = (AC) \cap (A'C')$, $R = (BC) \cap (B'C')$ sont alignés.

Exercice 10. (Formule de Héron)
(Mercier, Thm 192.) Soit ABC un triangle dans le plan affine euclidien. On note a, b, c les longueurs des côtés et α, β, γ les angles du triangle (avec les choix naturels).

1. Justifier le fait que l'aire du triangle est $bc \sin \alpha$.

> **Solution:** On a $\mathcal{A}_T = \frac{bh}{2}$; or, $h = c \sin \alpha$ donc on obtient $\mathcal{A}_T = \frac{bc \sin \alpha}{2} (= \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} \|)$.
>
> 
>

2. Justifier le fait que $a^2 + b^2 = c^2 - 2bc \cos \alpha$.

> **Solution:** On a $a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = c^2 + b^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (on a redémontré la formule d'Al Kashi).

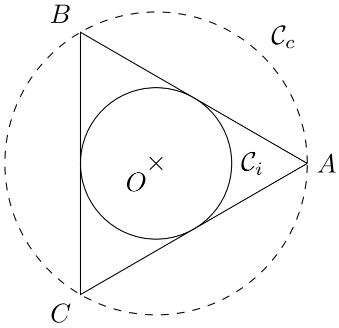
3. On note p le demi-périmètre de ABC. Déduire de ce qui précède que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle vérifie :
$$\mathcal{A}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

> **Solution:** On a
> $$\begin{aligned} \text{aire}(T)^2 &= \frac{b^2c^2}{4} \sin^2 \alpha \\ &= \frac{b^2c^2}{4} \left(1 - \cos^2 \alpha\right) \\ &= \frac{b^2c^2}{4} \left[1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{16} \left([4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2)\right] \\ &= \frac{1}{16} \left[\left(2bc + \left[b^2+c^2-a^2\right]\right)\left(2bc - \left[b^2+c^2-a^2\right]\right)\right] \\ &= \frac{1}{16} \left[((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)\right] \\ &= \frac{1}{16} (b+c+a)(b+c-a)(a+(b-c))(a-(b-c)) \\ &= \frac{a+b+c}{2} \times \frac{b+c-a}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a+c-b}{2}, \end{aligned}$$
> donc on trouve bien la formule annoncée.

Exercice 11. (Ellipse de Steiner)
(Cardero–Germoni T1, XI.1.) Soit ABC un triangle dans le plan affine euclidien muni de son repère canonique.

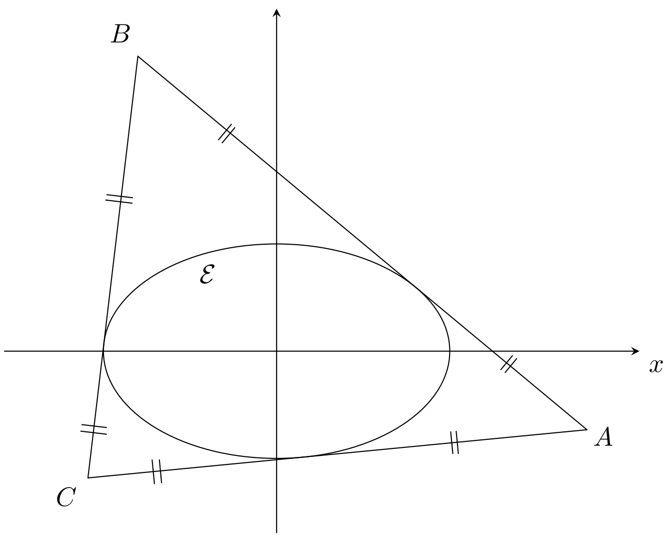
1. On suppose ABC équilatéral.
   (a) Montrer que le cercle inscrit est tangent aux côtés du triangle en leurs milieux.

   > **Solution:** Le cercle inscrit est bien tangent aux côtés. Le centre O du cercle inscrit coïncide avec le centre du cercle circonscrit, donc si I est le milieu de $[AB]$ alors $(OI) \perp (AB)$ donc I est sur le cercle inscrit.



(b) On se donne une ellipse $\mathcal{E}$ tangente aux côtés du triangle en leurs milieux. Montrer que, quitte à composer par une isométrie, on peut supposer que $\mathcal{E}$ a son centre à l'origine et que son grand axe coïncide avec l'axe des abscisses.

Solution: En translatant et tournant le repère (i.e. une rotation), on peut ramener le centre de l'ellipse à l'origine avec son grand axe sur l'axe des abscisses. Les translations et les rotations sont des isométries donc ABC reste équilatéral et $\mathcal{E}$ reste tritangante (cf. question suivante pour la tangence) en les milieux.



On remarque que le dessin est forcément faux à cause du résultat de l'exercice !

(c) Montrer qu'il existe une affinité orthogonale f transformant $\mathcal{E}$ en un cercle $\mathcal{C}$ et A, B, C en A', B', C' tels que $\mathcal{C}$ soit tangent aux côtés de $A'B'C'$ en leurs milieux.

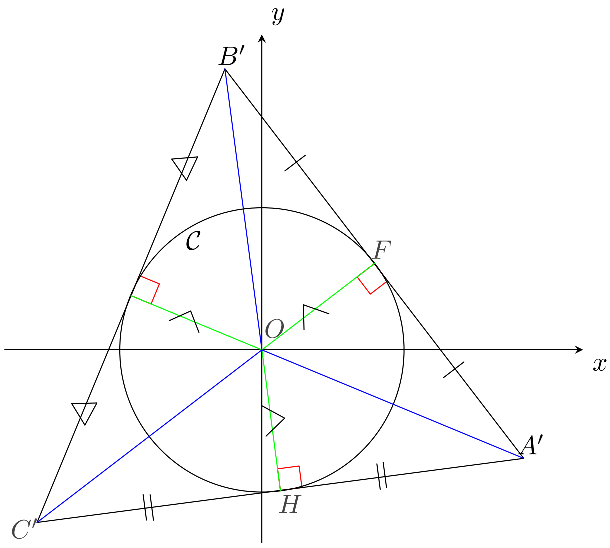
Solution: Soit $f : (x, y) \mapsto (\lambda x, y)$ avec $\lambda > 0$ choisie de telle sorte que $f(\mathcal{E}) =: \mathcal{C}$ soit un cercle (c'est bien une affinité orthogonale : elle est l'identité sur un axe et une homothétie sur un axe perpendiculaire). L'application f est affine donc :

— conserve les barycentres donc $\mathcal{C}$ est dans l'enveloppe convexe de $A'B'C'$ (où le prime désigne l'image par f) ;

— est différentiable donc conserve la tangence[1], donc $\mathcal{C}$ est tangente aux côtés de $A'B'C'$;

— conserve les milieux donc $\mathcal{C}$ est tritangent en les milieux des côtés du triangle $A'B'C'$.

Autrement dit, le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle $A'B'C'$, et de plus les points de tangence sont les milieux des côtés.



Remarquons que comme $\det f = \lambda > 0$, le triangle $A'B'C'$ reste bien direct.)

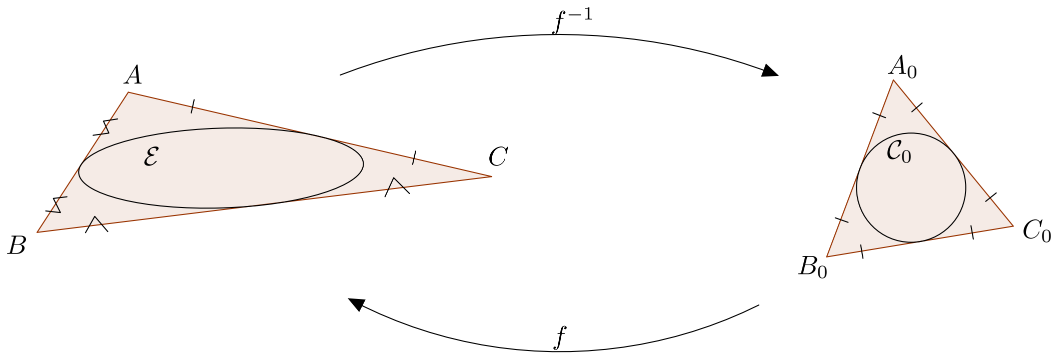
(d) Montrer que f coïncide sur le repère affine ABC avec une similitude dont 1 est valeur propre. En déduire que $\mathcal{E}$ est le cercle inscrit dans ABC.

Solution: Montrons tout d'abord que $A'B'C'$ est équilatéral. Les triangles rectangles $OA'F$ et $OA'H$ vérifient $OF = OH$ (car $\mathcal{C}$ est un cercle !) donc on en déduit que $A'F = A'H$ (par exemple par le théorème de Pythagore :-)). Ainsi, comme la tangence se fait en les milieux on en déduit que $A'B' = A'C'$; en faisant cela pour le segment $[OC']$ on en déduit de la même manière que $A'C' = B'C'$ et donc finalement que $A'B'C'$ est bien équilatéral.

L'application linéaire f envoie donc un triangle équilatéral sur un triangle équilatéral, donc f est de la forme $f = \mu r t$ avec $\mu > 0$, r une rotation vectorielle et t une translation (car f et $\mu r t$ coïncident sur le repère affine $\{A, B, C\}$). Puisque f est linéaire on en déduit que $t = \mathrm{id}$ donc $f = \mu r$. Puisque f possède 1 comme valeur propre (chaque vecteur de l'axe des ordonnées étant fixe par f), on en déduit que nécessairement $f = \mathrm{id}$. On a donc $\mathcal{E} = f(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$ est le cercle inscrit à $A'B'C' = ABC$.

2. Déduire du résultat précédent le théorème de Steiner : soit ABC un triangle non aplati, alors il existe une unique ellipse tangente aux côtés du triangle en leurs milieux.

Solution: On vient de montrer qu'un triangle équilatéral possède une unique ellipse tritangente aux milieux des côtés, à savoir, le cercle inscrit. Ainsi, si $T = ABC$ est un triangle non aplati et si T_0 est un triangle équilatéral, il existe une application affine f qui envoie T sur T_0. On sait que $f^{-1}(\mathcal{C}_0)$ est une ellipse tritangante aux milieux des côtés des T, où $\mathcal{C}_0$ est le cercle inscrit à T_0.



Si $\mathcal{E}$ est une autre telle ellipse, alors $f(\mathcal{E}) = \mathcal{C}_0$ par ce qui précède donc $\mathcal{E} = f^{-1}(\mathcal{C}_0)$.

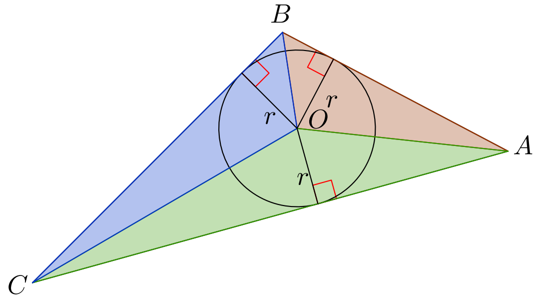
3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle contenu dans l'enveloppe convexe d'un triangle T.

(a) Montrer que l'aire de $\mathcal{C}$ est inférieure à celle du cercle inscrit $\mathcal{C}_i$ dans T.

Solution: Si $\mathcal{C}$ est tangent à tous les côtés alors nécessairement son centre est sur les bissectrices et $\mathcal{C}$ est donc le cercle inscrit. Sinon, on peut le translater puis l'agrandir pour obtenir un cercle contenu dans l'enveloppe convexe de T d'aire strictement plus grande. Plus précisément, si $\mathcal{C}$ est tangent à un seul côté on le translate selon la perpendiculaire à ce côté passant par le point de tangence ; si $\mathcal{C}$ est tangent à deux côtés on le translate selon la bissectrice correspondante. Le cercle va bien rester dans l'enveloppe convexe ouverte de T par continuité de la distance du centre du cercle à un côté non tangent (qui est compact donc la distance est strictement positive) et on pourra donc augmenter le rayon.

(b) Soit r le rayon de $\mathcal{C}_i$ et p le demi-périmètre de T, montrer que $r = \frac{\mathcal{A}_T}{p}$.

Solution: Si l'on désigne par une lettre minuscule la longueur du côté opposé, on a aire$(BOC) = \frac{ra}{2}$, aire$(COA) = \frac{rb}{2}$ et aire$(AOB) = \frac{rc}{2}$ donc finalement $\mathcal{A}_T = rp$.



(c) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à la formule de Héron, montrer que si $\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i}}{\mathcal{A}_T} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, avec égalité si et seulement si T est équilatéral.

Solution: Par la question précédente, on a $r = \frac{\mathcal{A}_T}{p}$, d'où :

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i}}{\mathcal{A}_T} = \frac{\pi r^2}{\mathcal{A}_T} = \frac{\pi \mathcal{A}_T}{p^2}.$$

L'inégalité arithmético-géométrique dit que :

$$[(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{p}{3}$$

avec égalité si et seulement si $p-a = p-b = p-c$, *i.e.* $a = b = c$ *i.e.* le triangle T est équilatéral. Ainsi, on en déduit que $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, d'où :

$$\frac{\mathcal{A}_T}{p^2} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p\sqrt{p}} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

avec égalité si et seulement si T est équilatéral.

4. Montrer que si $\mathcal{E}$ est une ellipse contenue dans un triangle T, alors $\frac{\mathcal{A}_\mathcal{E}}{\mathcal{A}_T} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{E}$ est l'ellipse de Steiner de T.

Solution: Par le même argument que dans la question 2, on sait qu'il existe une bijection affine f qui envoie $\mathcal{E}$ sur un cercle $\mathcal{C}$ inclus dans l'enveloppe convexe d'un triangle $T_0 = f(T)$. Par la question précédente, on a donc $\frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_{T_0}} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si T_0 est équilatéral et $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit à T_0. Ainsi :

$$\frac{\mathcal{A}_\mathcal{E}}{\mathcal{A}_T} = \frac{\text{aire}(f^{-1}(\mathcal{C}))}{\text{aire}(f^{-1}(T_0))} = \frac{|\det f^{-1}|\mathcal{A}_\mathcal{C}}{|\det f^{-1}|\mathcal{A}_{T_0}},$$

donc on récupère $\frac{\mathcal{A}_\mathcal{E}}{\mathcal{A}_T} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle T_0. D'après la question 2, on sait que $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle équilatéral T_0 si et seulement si $\mathcal{E}$ est l'ellipse de Steiner du triangle T, ce qui conclut.

Exercice 12. (Théorème fondamental de la géométrie affine)
(Mercier, §3.7.) Soient E et F deux espaces affines sur $k = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$ avec $p \neq 2$. On suppose que $\dim E \geq 2$. Montrer que toute bijection $f : E \to F$ qui préserve l'alignement est affine. Le résultat reste-t-il vrai si $\dim E = 1$?

Solution: Remarquons que, par bijectivité, nécessairement f transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles. On fixe un point $O \in F$ et on définit ϕ comme il se doit (ce sera la partie linéaire). Avec des parallélogrammes on montre que ϕ est *semi*-linéaire (*i.e.* les scalaires sont tordus par σ un endomorphisme de l'anneau k), mais d'après l'hypothèse sur les corps ces morphismes sont nécessairement l'identité (classique pour $k \neq \mathbb{R}$, et pour $k = \mathbb{R}$ on remarque que pour $x \geq 0$ on a $\sigma(x) = \sigma(\sqrt{x})^2 \geq 0$ donc σ est croissante donc $\sigma(x) = x$ en prenant des suites croissantes et décroissantes de rationnels qui convergent vers x).

Le résultat est *faux* si $\dim E = 1$, par exemple avec $x \mapsto x^3$ pour $k = \mathbb{R}$. En effet, c'est bien une bijection, elle préserve l'alignement (on est sur une droite!) et elle n'est pas affine (sinon elle serait de la forme $x \mapsto ax + b$).

Exercice 13. (Mercier, §11.2.6.A.) Donner le lieu des points $E(z)$ tels que $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 \in \mathbb{R}_-^*$.

Solution: Soit M, A, B les points d'affixes respectives $z, -1, 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 \in \mathbb{R}_-^* &\iff z \neq \pm 1 \text{ et } \arg\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3\right] \in \mathbb{R}_-^* \\
&\iff M \neq A, B \text{ et } 3\arg\frac{z-1}{z+1} = \pi \pmod{2\pi} \\
&\iff M \neq A, B \text{ et } \arg\frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \\
&\iff M \neq A, B \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \pi \text{ ou } \pm\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.
\end{aligned}$$

La condition $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \pi \pmod{2\pi}$ caractérise le segment ouvert $]AB[$. Sinon, le théorème de l'*arc capable* (cf. Mercier, §11.1.3 Thm 180 et 181 ; c'est une sorte de réciproque au théorème de l'angle inscrit) montre que pour $a \neq 0 \pmod{\pi}$, la condition $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = a \pmod{2\pi}$ détermine la portion du cercle $\mathcal{C}$ d'extrémités A et B, tel que si $T \neq A$ est tel que $\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right) = a \pmod{2\pi}$ alors T n'est pas dans l'arc et (AT) est tangent au cercle en A.

En effet, pour $a \neq 0 \pmod{\pi}$ on a $\sin a \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = a \pmod{2\pi} &\iff \begin{cases} \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = a \pmod{\pi} \\ \sin\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \sin a > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = a \pmod{\pi} \\ \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) \sin a > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

La première condition détermine le cercle $\mathcal{C}$. En effet, si $M \in \mathcal{C}$ alors on a bien $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = a \pmod{\pi}$ par le théorème de l'angle inscrit (avec la version avec la tangente). Réciproquement, soit $\mathcal{C}'$ est le cercle circonscrit au triangle ABM (qui n'est pas plat) , soit O' son centre et T_A' la tangente en A. Le théorème de l'angle inscrit montre encore que les angles de droites (T_A', AB) et (T_A, AB) sont égaux donc $T_A = T_A'$. Puisque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent par A et B et ont la même tangente en A, ils sont donc égaux donc $M \in \mathcal{C}$. Finalement, avec $M(x, y), A(x_A, y_B)$ et $B(x_B, y_B)$:

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix},$$

donc la condition sur le déterminant va bien donner un demi-plan.

Exercice 14. (Théorème de Ptolémée)
(Mercier, §11.2.6.B, Audin, §III.4 et Exercice III.61.) Montrer qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans

un cercle si et seulement si $AC \times BC = AB \times CD + AB \times BC$ (« le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés »).

Solution: En utilisant le point $H \in [AC]$ tel que $\widehat{ABH} = \widehat{DBC}$, on trouve deux paires de triangles semblables et on conclut via $AC = AH + HC$.

Pour montrer la réciproque, on va en fait montrer l'énoncé plus fort suivant (« inégalité de Ptolémée » ; Claude Plotémée, II^e siècle, a notamment utilisé ce théorème pour dresser des tables trigonométriques (voir par exemple l'article correspondant de Wikipédia) :

On a $AC \cdot BC \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$, avec égalité si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est convexe inscriptible.

Pour cela, on va utiliser l'inversion f de pôle D et de rapport 1, où l'inversion de rapport $k \in \mathbb{R}$ est donnée pour $M \neq D$ par $\overrightarrow{Df(M)} = \frac{k}{DM^2}\overrightarrow{DM}$ (*i.e.* $f(M) \in (DM)$ et $\overline{Df(M)} = \frac{1}{DM}$). Rappelons que pour une inversion de rapport k, on a :

$$A'B' = |k|\frac{AB}{DA \cdot DB}$$

(il suffit d'écrire $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{DB'}$ et de développer le carré de la norme). On trouve alors :

$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{AB}{AD \cdot BD}, \\ B'C' &= \frac{BC}{BD \cdot CD}, \\ A'C' &= \frac{AC}{AD \cdot CD}. \end{aligned}$$

Or, par l'inégalité triangulaire on a $A'C' \leq A'B' + B'C'$ donc :

$$\frac{AC}{AD \cdot CD} \leq \frac{AB}{AD \cdot BD} + \frac{BC}{BD \cdot CD},$$

donc, après multiplication par $AD \cdot BD \cdot CD$,

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

On a égalité si et seulement si A', B', C' sont alignés dans cet ordre. On va alors montrer que A, B et C sont sur le cercle de diamètre $[DH]$, où H' est le projeté orthogonal de D sur la droite $(A'C')$. L'ordre des points sera automatiquement puisque les points bougent verticalement par rapport à $(A'C')$.

Remarquons que le point H est bien défini, puisque f est une bijection, même une involution (valable pour tout $k \neq 0$). En particulier, pour tout point M on a $\overrightarrow{DM} = \frac{k}{DM'^2}\overrightarrow{DM'}$. Soit $M' \in (A'C')$. On a $\overrightarrow{DH'} \cdot \overrightarrow{M'H'} = 0$ donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{HM} &= \overrightarrow{DM} \cdot (\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DM}) \\ &= \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{HD} + DM^2 \\ &= \frac{k^2}{DM'^2 H'D^2}\overrightarrow{DM'} \cdot \overrightarrow{H'D} + \frac{k^2}{DM'^2} \\ &= \frac{k^2}{DM'^2}\left(\frac{1}{H'D^2}(\overrightarrow{DH'} + \overrightarrow{H'M'}) \cdot \overrightarrow{H'D} + 1\right) \\ &= \frac{k^2}{DM'^2}\left(\frac{-1}{H'D^2}H'D^2 + 1\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc on a bien montré que M appartient au cercle de diamètre $[DH]$.