Géométrie affine, euclidienne, projective : exercices

Références :
— Audin, Géométrie. Les exercices ne sont pas corrigés mais il y a des indications à la fin.
— Mercier, Cours de géométrie. Je recommande fortement la lecture complète ! (Au moins un survol.)
La feuille a été initialement conçue par Jérémy Le Borgne.

Exercice 1. (Mercier, Ch. 11–12.) On se place dans le plan affine euclidien. Justifier les résultats élémentaires suivants :

1. La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π.
2. La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est $(n-2)\pi$.
3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B, C trois points de $\mathcal{C}$. On suppose que C est sur le grand arc délimité par A et B. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est $2\widehat{ACB}$ (la notation désigne l'angle géométrique saillant non orienté, dans $[0, \pi]$). Que se passe-t-il si C est sur le petit arc ?
4. Les médianes d'un triangle sont concourantes (version barycentre et application affine) et chaque médiane sépare le triangle en deux triangles de mêmes aires.
5. Les médiatrices d'un triangle sont concourantes, et leur point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.
6. Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
7. Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes, et leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.
8. Démontrer le théorème de Pythagore.
9. Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors pour tout point M on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + AB^2/2$ (théorème de la médiane).

Exercice 2. (Mercier, §12.4.) Soit ABC un triangle non aplati. On note a, b, c les longueurs des côtés $[BC], [AC], [AB]$ et α, β, γ les angles aux sommets A, B, C. On note G, H, I, O respectivement le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit de ABC.

On se place dans le repère barycentrique ABC.

1. Donner un système de coordonnées barycentriques de G.
2. Montrer qu'un système de coordonnées barycentriques de I est (a, b, c). (Mercier, Thm 165.)
3. (a) (Audin, Ex. III.13 et Mercier, Thm 191.) Justifier que $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{2S}$, où R est le rayon du cercle circonscrit et S l'aire de ABC.
   (b) Montrer qu'un système de coordonnées barycentriques de H est $(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$.
4. (Audin, Ex. III.14.) Montrer qu'un système de coordonnées barycentriques de O est $(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$. (On pourra noter que O est l'orthocentre d'un triangle remarquable.)

Exercice 3. (Mercier, §18.2.1 Application 2.) Soit ABC un triangle non aplati dans le plan affine euclidien. On considère les points A', B', C' obtenus respectivement comme le symétrique de B par rapport à C, de C par rapport à A, et de A par rapport à B.

1. Le triangle $A'B'C'$ peut-il être aplati ?
2. Exprimer les coordonnées barycentriques de A, B, C dans le repère $A'B'C'$.
3. Exprimer l'aire de $A'B'C'$ en fonction de celle de ABC.
4. Proposer une méthode pour reconstruire A, B, C à partir de A', B', C'. On pourra chercher les coordonnées barycentriques des points d'intersection des côtés de ABC avec ceux de $A'B'C'$.
5. Retrouver les résultats précédents en étudiant le cas d'un triangle équilatéral.

Exercice 4. On se place dans le plan affine sur un corps K.

1. Soient A, B, A', B' quatre points non alignés du plan. Montrer que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles si et seulement s'il existe une homothétie ou une translation transformant A en A' et B en B'. Montrer qu'une telle transformation est unique.
2. Quel résultat élémentaire de géométrie euclidienne retrouve-t-on ?
3. (Mercier, Thm 172.) Soient A, B, C, D quatre points cocycliques, et Q le point d'intersection de (AD) et (BC) (s'il existe). Montrer l'égalité des rapports de longueurs :
$$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{DC}.$$

Exercice 5. (Théorème de Desargues, version faible)
(Audin, Thm 1.4.6 et Exo I.60.) On se place dans le plan affine sur un corps K.

1. Soient ABC, $A'B'C'$ deux triangles non aplatis sans sommet commun. On suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ (resp. (AC) et $(A'C')$, (BC) et $(B'C')$) sont parallèles. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.
2. On dessine sur une feuille deux droites D et D', non parallèles, telles que le point d'intersection de D et D' soit en dehors de la feuille. On se donne aussi un point A situé entre D et D'. Proposer une construction basée sur le théorème de Desargues pour construire la droite passant par A et le point d'intersection de D et D'.

Exercice 6. (Théorème de Ménélaüs)
(Mercier, Thm 44 et §3.2.5.) On se place dans le plan affine sur un corps K. Soit ABC un triangle non aplati et A', B', C' des points situés respectivement sur les droites $(BC), (AC), (AB)$ et distincts de A, B, C.

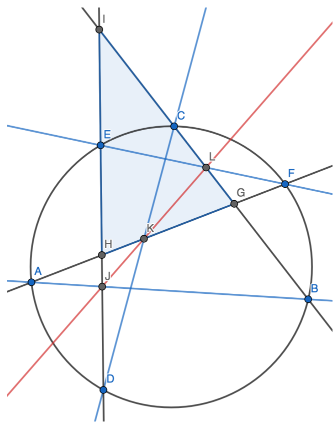
1. Exprimer les coordonnées barycentriques de A', B', C' dans le repère ABC en fonction des rapports algébriques de longueurs $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}, \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.
2. Déterminer les coordonnées barycentriques du point d'intersection de $(A'B')$ et (AB), s'il existe.
3. En déduire que A', B', C' sont alignés si et seulement si
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Exercice 7. (Théorème de Pappus) (Audin, Thm I.4.5.)

1. On se place dans le plan affine sur un corps K. Soient D, D' deux droites concourantes, et A, B, C (respectivement A', B', C') des points de D (resp. D') deux à deux distincts. On suppose que $(AB') \mathbin{/\!/} (A'B)$ et $(AC') \mathbin{/\!/} (A'C)$. Montrer que $(B'C) \mathbin{/\!/} (C'B)$.
2. On se place maintenant dans le plan projectif sur K. Soient D, D' deux droites distinctes, et A, B, C (respectivement A', B', C') des points de D (resp. D'). En utilisant la question précédente, retrouver le théorème de Pappus qui affirme que les points d'intersection respectifs P, Q, R de (AB') et (BA'), (BC') et $(B'C)$, (AC') et (CA') sont alignés.
3. On pourra proposer une démonstration purement affine de ce théorème, en appliquant 5 fois le théorème de Ménélaüs (voir aussi l'exercice 8)...

Exercice 8. (Hexagramme de Pascal)
(Audin, Exercice III.48 et Thm VII.4.4, Mercier, Thm 178.) On se place dans le plan affine euclidien.

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ et six points A, B, C, D, E, F sur $\mathcal{C}$ tel que l'hexagone $ABCDEF$ n'a pas de côtés parallèles. On considère les points d'intersection J, K, L obtenus en reliant les côtés opposés de l'hexagone $ABCDEF$. On note de plus G, H, I les intersections respectives de (AF) et (BC), (AF) et (DE), (BC) et (DE).



(a) Donner les trois relations obtenues en appliquant le théorème de Ménélaüs dans le triangle GHI avec les transversales (AB), (CD) et (EF).

(b) En utilisant ces relations et la question 3 de l'exercice 4 (en version « puissance d'un point par rapport à un cercle »), démontrer que

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{JI}} \frac{\overline{LG}}{\overline{LH}} \frac{\overline{KI}}{\overline{KG}} = 1.$$

(c) En déduire que J, K, L sont alignés.

2. Comment ce théorème se généralise-t-il dans le plan projectif lorsqu'on fait agir $PGL_3(\mathbb{R})$ sur la figure précédente ?
3. Justifier que le théorème de Pappus est un cas particulier du résultat précédent.
4. Proposer une méthode pour construire la tangente à une conique en l'un de ses points basée sur ce théorème.

Exercice 9. (Homologies et théorème de Desargues)
(Audin, Thm VI.33.) On se place dans l'espace projectif $P(E)$ associé à un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K. On appelle *homologie* une homographie $h \in PGL(E)$ dont l'application linéaire sous-jacente est une dilatation.

1. Montrer que si h est une homologie qui n'est pas l'identité, il existe un unique hyperplan projectif de points fixes de h et un unique autre point fixe en dehors de cet hyperplan.
   Ces objets s'appellent respectivement la base (l'axe en dimension 2) et le sommet de l'homologie.
2. Soit h une homologie de base H et de sommet S.
   (a) Soit D une droite projective passant par S. Justifier que D est laissée globalement invariante par h.
   (b) On suppose donnés S, H ainsi qu'un point A et son image A' par h. Montrer que si $B \in P(E)$ n'est pas sur la droite (SA), alors l'image de B par h est le point d'intersection de (SB) avec $(A'Q)$, où Q est le point d'intersection de (AB) avec H.
3. On se place désormais dans le plan projectif $P^2(K)$. Soient D une droite projective, $S \notin D$ un point, et $A, A' \notin \{S\} \cup D$ tels que S, A et A' soient alignés. Montrer qu'il existe une unique homologie h de centre S et d'axe D telle que $h(A) = A'$.
4. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non aplatis et sans sommet commun du plan projectif. On suppose que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en S.
   (a) Soient $P = (AB) \cap (A'B')$ et $Q = (AC) \cap (A'C')$. Soit $D = (PQ)$. Montrer qu'il existe une unique homologie de centre S et d'axe D qui envoie A sur A', et montrer qu'elle envoie B sur B' et C sur C'.
   (b) En déduire que $R = (BC) \cap (B'C') \in D$.
5. On reprend les notations de la question précédente, mais on suppose cette fois que P, Q, R sont alignés sur une droite D'.
   (a) On note S' le point d'intersection de (AA') et (BB'). Montrer qu'il existe une unique homologie de centre S' et d'axe D' qui envoie A sur A'.
   (b) Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en S
6. En déduire le théorème de Desargues :
   Soient ABC, $A'B'C'$ deux triangles non aplatis de $P^2(K)$ sans sommet commun. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe une homologie h telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$;
   (ii) Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ;
   (iii) Les points $P = (AB) \cap (A'B')$, $Q = (AC) \cap (A'C')$, $R = (BC) \cap (B'C')$ sont alignés.

Exercice 10. (Formule de Héron)
(Mercier, Thm 192.) Soit ABC un triangle dans le plan affine euclidien. On note a, b, c les longueurs des côtés et α, β, γ les angles du triangle (avec les choix naturels).

1. Justifier le fait que l'aire du triangle est $bc \sin \alpha$.
2. Justifier le fait que $a^2 + b^2 = c^2 - 2bc \cos \alpha$.
3. On note p le demi-périmètre de ABC. Déduire de ce qui précède que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle vérifie :

$$\mathcal{A}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Exercice 11. (Ellipse de Steiner)
(Cardero–Germoni T1, XI.1.) Soit ABC un triangle dans le plan affine euclidien muni de son repère canonique.

1. On suppose ABC équilatéral.
   (a) Montrer que le cercle inscrit est tangent aux côtés du triangle en leurs milieux.
   (b) On se donne une ellipse $\mathcal{E}$ tangente aux côtés du triangle en leurs milieux. Montrer que, quitte à composer par une isométrie, on peut supposer que $\mathcal{E}$ a son centre à l'origine et que son grand axe coïncide avec l'axe des abscisses.
   (c) Montrer qu'il existe une affinité orthogonale f transformant $\mathcal{E}$ en un cercle $\mathcal{C}$ et A, B, C en A', B', C' tels que $\mathcal{C}$ soit tangent aux côtés de $A'B'C'$ en leurs milieux.
   (d) Montrer que f coïncide sur le repère affine ABC avec une similitude dont 1 est valeur propre. En déduire que $\mathcal{E}$ est le cercle inscrit dans ABC.
2. Déduire du résultat précédent le théorème de Steiner : soit ABC un triangle non aplati, alors il existe une unique ellipse tangente aux côtés du triangle en leurs milieux.
3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle contenu dans l'enveloppe convexe d'un triangle T.
   (a) Montrer que l'aire de $\mathcal{C}$ est inférieure à celle du cercle inscrit $\mathcal{C}_i$ dans T.
   (b) Soit r le rayon de $\mathcal{C}_i$ et p le demi-périmètre de T, montrer que $r = \frac{\mathcal{A}_T}{p}$.
   (c) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à la formule de Héron, montrer que si $\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}_i}}{\mathcal{A}_T} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, avec égalité si et seulement si T est équilatéral.
4. Montrer que si $\mathcal{E}$ est une ellipse contenue dans un triangle T, alors $\frac{\mathcal{A}_\mathcal{E}}{\mathcal{A}_T} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{E}$ est l'ellipse de Steiner de T.

Exercice 12. (Théorème fondamental de la géométrie affine)
(Mercier, §3.7.) Soient E et F deux espaces affines sur $k = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$ avec $p \neq 2$. On suppose que $\dim E \geq 2$. Montrer que toute bijection $f : E \to F$ qui préserve l'alignement est affine. Le résultat reste-t-il vrai si $\dim E = 1$?

Exercice 13. (Mercier, §11.2.6.A.) Donner le lieu des points $E(z)$ tels que $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 \in \mathbb{R}_-^*$.

Exercice 14. (Théorème de Ptolémée)
(Mercier, §11.2.6.B, Audin, §III.4 et Exercice III.61.) Montrer qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si $AC \times BC = AB \times CD + AB \times BC$ (« le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés »).