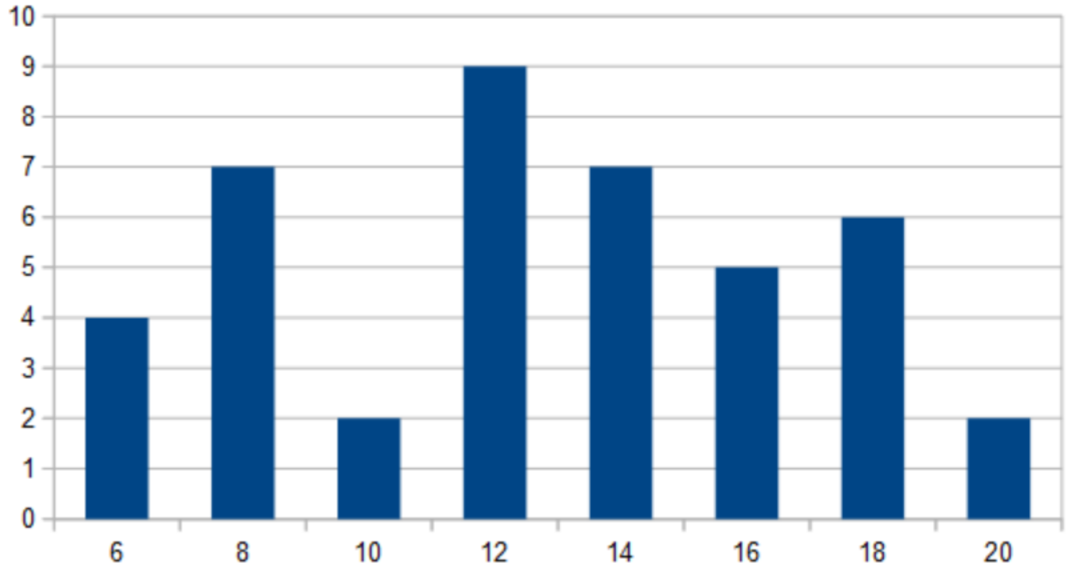
Commentaires sur le sujet MG2010

Salim Rostam

Quelques chiffres

Les notes vont de 5.5 à 20, moyenne 12 écart-type 4.2. Les fréquences :



(au-dessus du 6 sont les notes inférieures ou égales à 6, et sinon au-dessus de i sont les notes dans $]i-2, i]$).

La note brute était sur 106, pour ramener sur 20 j'ai fait (note $+ 2.5) \times 1.4$. La moyenne brute, ramenée sur 20, est de 6.1.

Partie	Barème brut	Nombre d'entames	Moyenne brute (ramenée sur 20)
I	28	42 (tout le monde)	9.2
II	17	41	10.6
III	33	35	6.1
IV	28	22	3.3

Remarques d'ordre général

- Il faut mettre en confiance le correcteur ! En particulier, il faut *bien* soigner la rédaction des premières questions (rédiger les récurrences, donner précisément tous les arguments importants, s'appliquer sur la présentation, etc.). Dans la suite on peut se permettre plus de libertés.
- Beaucoup des remarques qui suivent sont les mêmes que celles du rapport du jury !

Partie I

1(b) On a $m_A(A) = 0$ par définition ! Cayley–Hamilton dit que $\chi_A(A) = 0$.

1(c) Il ne fallait pas oublier de dire que K est infini, et en effet c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$ donc il contient $\mathbb{Q}$.

1(d) Attention, $A \neq B \not\Rightarrow \det A \neq \det B$! De plus, il fallait prendre soir de traiter le cas $\lambda = 0$ à part, au cas où des puissances négatives de λ apparaitraient suite à Bezout.

2(a) Pour moi, on peut utiliser sans justifier le fait que $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme d'algèbre (ou alors justifier rapidement, de toutes façons c'est impossible de faire long !). En tout cas, pour montrer que $(PMP^{-1})^n = PM^nP^{-1}$, pas besoin de récurrence, c'est juste une conséquence du fait qu'on a un (auto)morphisme d'algèbre.

3(a) Notée sur 1, j'ai été gentil mais pas très satisfait. L'idée est juste de, partant d'un polynôme P de degré r, considérer un corps de rupture K'/K pour un facteur irréductible Q de degré $s \leq r$. On a alors :
— d'une part $[K' : K] = s \leq r$;
— d'autre part, le corps L est un corps de décomposition de $P/(X - \alpha)$ sur K' (où $\alpha \in K'$ est une racine de Q), d'où $[L : K'] \leq (r-1)!$ par hypothèse de récurrence.

On conclut avec la formule de multiplicativité des degrés $[L : K] = [L : K'][K' : K]$.

3(c) Attention à la rédaction, il fallait systématiquement mentionner sur quel corps on fait la réduction de Jordan. Les polynômes minimaux et caractéristiques ont les mêmes racines (sur un corps de décomposition), à savoir, les valeurs propres, donc m scindé $\iff$ χ scindé. Avoir même χ *n'implique pas* avoir même réduite de Jordan ! ! Exemple : $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. En particulier, une matrice de Jordan n'est caractérisée ni par son polynôme minimal ni par son polynôme caractéristique (mais, comme on l'a vu, par la dimension de ses noyaux itérés).

Une rédaction possible : on sait que A et A' sont semblables sur $\mathbb{C}$ donc ont même polynôme caractéristique. Puisque χ_A est scindé sur L (car m_A l'est), on en déduit que $\chi_{A'}$ aussi donc on peut considérer les réduites de Jordan J (resp. J') de A (resp. A') sur L. Par unicité, ces réduites sont également des réduites de Jordan sur $\mathbb{C}$, et puisque A et A' y sont semblables on a $J = J'$ par unicité. Ainsi, sur L les matrices A et A' sont toutes les deux semblables à J, donc semblables.

4(a) Même remarque que précédemment, une matrice de Jordan n'est pas caractérisée par son polynôme minimal. Il fallait remarquer qu'à polynôme minimal fixé ne correspond qu'un nombre fini de matrices de Jordan (les choix portant sur la sur-diagonale, qui est à valeurs dans $\{0, 1\}$).

5(b) Si $Y \in S_A$ on a $Y^n = A$ donc $C(Y) \subseteq C(Y^n) = C(A)$. Ainsi, si $C(Y) \neq C(A)$ alors on peut trouver $P \in C(A) \setminus C(Y)$. Par 2.$(a)$ on a $PYP^{-1} \in S_A$ et le but est de construire une infinité de matrices inversibles à partir de P qui donnent une *infinité* de conjugués. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $P_k := P + kI_p \in C(A) \setminus C(Y)$ (écrire les relations de commutation !). Ainsi, pour chaque $k \geq 0$ on a $P_k Y P_k^{-1} \in S_A$, et il reste à voir que si $k \neq k'$ alors $P_k Y P_k^{-1} \neq P_{k'} Y P_{k'}^{-1}$. Mais si $k' = k + d$ alors $P_{k'} = P_k + dI_p$ et on a :

$$\begin{aligned} P_k Y P_k^{-1} = P_{k'} Y P_{k'}^{-1} &\iff Y P_k^{-1} P_{k'} = P_k^{-1} P_{k'} Y \\ &\iff Y P_k^{-1}(P_k + dI_p) = P_k^{-1}(P_k + dI_p) Y \\ &\iff Y(I_p + dP_k^{-1}) = (I_p + dP_k^{-1}) Y \\ &\iff I_p + dP_k^{-1} \in C(Y) \\ &\iff P_k^{-1} \in C(Y) \end{aligned}$$

$$\iff P_k \in C(Y),$$

ce qui est faux par hypothèse. On conclut. Au passage, pour dire que $M \in C(Y) \iff M^{-1} \in C(Y)$ on n'a pas besoin de dire que M^{-1} est un polynôme en M, mais juste écrire les relations de commutation.

6(a) Première méthode, quand on n'a pas d'idée : se donner un polynôme q et développer à la main $q(N_p)^n$ (seulement les détails qui nous intéressent), où on écrit le coefficient devant N_p^k comme un polynôme P_k en les coefficients de q (ça marche) ! Deuxième : on écrit un développement limité de $x \mapsto (1+x)^{1/n}$ en 0 à l'ordre p (qui existe, par exemple car cette fonction est développable en série entière en 0, ou alors juste p fois dérivable en 0) :

$$(1+x)^{1/n} = q(x) + o(x^p),$$

où $q \in K_{p-1}[x]$. On sait ensuite que le DL_0^p de $x \mapsto 1+x$ s'obtient en mettant q à la puissance n et en enlevant tous les termes d'ordre $\geq p$. Si $\tilde{q} \in K_{p-1}[x]$ désigne ce polynôme, on trouve alors

$$1 + x = \tilde{q}(x) + o(x^p).$$

Par unicité du développement limité, on a alors $1 + x = \tilde{q}(x)$ (car $p \geq 1$). Finalement, puisque $N_p^p = 0$ on en déduit que $q(N_p)^p = \tilde{q}(N_p) = I_p + N_p$.

Partie II

Cette partie n'a étonnamment pas été très bien réussie. C'était une simple étude de suite !

1 On peut bien sûr penser à une norme subordonnée : dans ce cas donner la définition et montrer qu'elle vérifie l'inégalité (pour moi on peut admettre qu'il s'agit d'une norme). En général, si N est n'importe quelle norme alors l'application $(B, C) \mapsto BC$ est continue pour N (bilinéaire partant d'un ev de dimension finie), et si k est (plus grand que) sa norme alors kN est une norme sous-multiplicative.

Ensuite, pour résoudre $X^n = A$ on dit que l'on résout plutôt $X^{-n} = B := A^{-1}$, ce qui conduit à introduire la suite (X_k) définie par X_0 commutant avec A et

$$X_{k+1} = (1 + 1/n)X_k - (1/n)BX_k^{n+1}.$$

Cela provient en fait de la méthode de Newton. Rappelons que, sur $\mathbb{R}$, pour résoudre $f(x) = 0$ on choisit x_0 et pour chaque k, le réel x_{k+1} est donné par l'intersection de la tangente en le point d'abscisse x_k avec l'axe des abscisses. Autrement dit :

$$0 = (x_{k+1} - x_k)f'(x_k) + f(x_k),$$

d'où $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1}f(x_k)$. L'idée est alors que la suite (x_k) converge vers une solution de $f(x) = 0$ (une étude plus précise de la méthode de Newton constitue un développement). Si f est la fonction $x \mapsto x^n - a$, on trouve donc

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - (nx_k^{n-1})^{-1}(x_k^n - a) \\ &= x_k - (1/n)x_k + (1/n)ax_k^{-n+1} \\ &= (1 - 1/n)x_k + (1/n)ax_k^{-n+1}. \end{aligned}$$

L'idée est alors de remplacer les réels par des matrices, et on obtient alors

$$X_{k+1} = (1 - 1/n)X_k + (1/n)AX_k^{-n+1}.$$

Le problème est que des puissances négatives de X_k apparaissent, et à priori X_k n'est pas inversible. Pour cela, on résout plutôt $x^{-n} - b = 0$ (où $b := 1/a$) ; on trouve

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - (-nx_k^{-n-1})^{-1}(x_k^{-n} - b) \\ &= (1 + 1/n)x_k - (1/n)bx_k^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où, en passant aux matrices,

$$X_{k+1} = (1 + 1/n)X_k - (1/n)BX_k^{n+1}.$$

Remarquons que remplacer les réels par des matrices dans la méthode de Newton peut également servir pour trouver la décomposition de Dunford sans connaître les valeurs propres.

2(a) Il fallait, dans cette question et les suivantes, mentionner la continuité du produit matriciel. De plus, la relation de commutation n'est pas transitive, et comme déjà dit il n'y a pas besoin de dire que A^{-1} est un polynôme en A pour dire que X commute avec $A \iff X$ commute avec A^{-1}.

2(c) Il fallait mentionner la commutativité de U_k et I_p au moment de faire la formule du binôme. Pour montrer une telle formule de récurrence, une idée est de partir de la formule sur (X_k) puis de remplacer les X_k par $(U_k + I_p)Y$.

3(a) Il s'agissait d'une simple étude de fonction. Une solution simple est de remarquer que $r \mapsto \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} r^{j-1}$ est strictement croissante (par somme !), vaut 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc prend une unique fois la valeur n par le théorème de la bijection. Il est très dangereux d'écrire quelque chose comme « par le théorème des valeurs intermédiaires il y a un unique ... », le TVI étant un théorème d'existence. On préférera le théorème de la bijection sus-mentionné ou le « TVI monotone », le « corollaire du TVI », ... Finalement, pour ceux qui ont calculé un point où une dérivée s'annule, il fallait bien préciser que ce point est > 0 (typiquement $\sqrt[n]{\frac{2n+1}{n+1}} > 1$).

3(b) La suite (x_k) est décroissante minorée donc converge. La limite converge vers un point fixe de la fonction donnant la récurrence *par continuité*. Il ne fallait ici pas tomber dans le piège : dans la question (a) on parle d'un « unique » point fixe, mais sur $]0, +\infty[$! Cela a induit en erreur certains qui en on déduit que la suite est croissante, convergeant vers r. Puisque $x_k \in [0, r[$, les limites possibles sont 0 et r mais $x_k \leq x_0 < r$ donc $x_\infty \leq x_0 < r$ donc la limite est nulle.

Partie III

Cette partie était peut-être notée sur trop de points.

1(b) Attention, la question (a) *ne* montre *pas* que $K[x] \ni h \mapsto h(A)$ arrive dans S_A.

2(d) Il fallait expliquer pourquoi si X est nilpotente alors $X^p = 0_p$.

3(a) C'est dommage, beaucoup avaient presque la bonne formule : ils ont dit que $a_n = \cos(2^n r\pi)$ et non $a_n = 2\cos(2^n r\pi)$... Pour montrer la périodicité à partir d'un certain rang, on peut remarquer que si $r = \frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$ alors $a_n = 2\cos(2\frac{2^n a}{2b}\pi) = 2\,\mathrm{Re}(\exp(\frac{2i2^n a\pi}{2b}))$. Autrement dit, le réel a_n est la partie réelle d'une racine complexe $2b$-ième de l'unité, donc on peut trouver $n < n'$ tels que $a_{n'} = a_n$. Puisque la suite est *récurrente d'ordre* 1, on en déduit qu'à partir du rang n' la suite est périodique (car alors $a_{n'+1} = a_{n+1}$, etc.).

4 Si on utilisait les résultats de la partie, il fallait préciser que A vérifiait les hypothèses !

Partie IV

2(b) C'est un piège `:-)` En particulier, la réduite de Jordan de $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est *pas* $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. En effet, en permutant les vecteurs de base de A (on échange e_2 et e_3) on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De toutes façons, on a $A^2 = 0_4 \neq B^2$. Pour $n < p$, l'idée de la réponse était encore de permuter les vecteurs de base : étant donné $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on part de $X^i v =: e_i$, à côté duquel on met e_{i+n} puis e_{i+2n} etc. jusqu'à ce qu'on tombe dans le noyau de X^n. Pour chaque i, le k maximal qui apparait avec $i + kn$ est le plus grand k tel que $i + kn < p$, c'est-à-dire $k = \lfloor \frac{p-1-i}{n} \rfloor$. La matrice de Jordan associée à X^n est donc donnée par n blocs de Jordan, donc les tailles sont les $\lfloor \frac{p-1-i}{n} \rfloor + 1$ pour chaque $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour expliciter cette partie entière, on fait la division euclidienne de $p - 1$ par n : on écrit $p - 1 = nq + r$ avec $0 \leq r < n$. On a donc

$$\frac{p-1-i}{n} = \frac{nq + (r-i)}{n} = q + \frac{r-i}{n},$$

donc $\lfloor \frac{p-1-i}{n} \rfloor = \begin{cases} q, & \text{si } i \in \{0, \ldots, r\}, \\ q-1, & \text{sinon } (i \in \{r+1, \ldots, n-1\}). \end{cases}$ Il y a donc $r + 1$ blocs de taille $q + 1$ et $n - r - 1$ blocs de taille q.