Réduction de Jordan

Salim Rostam

19 décembre 2018

Références : Grifone (Algèbre linéaire), Gourdon (Algèbre), Prasolov (Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire).

1 Trigonalisation optimale

Le but général de la réduction des endomorphismes et de trouver une forme conjuguée plus simple pour les endomorphismes. Soit k un corps et $M \in \mathrm{Mat}_n(k)$ une matrice de taille $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ à coefficients dans k. Un des premiers résultats est le suivant : si χ_M, le polynôme caractéristique de M, est scindé alors (et c'est une équivalence) la matrice M est trigonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, autrement dit, de la forme $D+T$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale et T triangulaire supérieure stricte. En particulier, la matrice T est nilpotente. La *décomposition de Dunford*, déjà vue, améliore ce résultat.

Théorème. *On peut choisir D et $T =: N$ qui commutent (de plus, les endomorphismes associés sont alors uniques).*

Remarque. Si A, B sont deux matrices qui commutent avec A diagonalisable et B trigonalisable alors on peut trouver une base dans laquelle A est diagonale et B triangulaire supérieure : il suffit de trigonaliser B sur chaque sous-espace propre de A, ces derniers étant stables par B.

Rappelons une construction possible de telles matrices D et N.

Lemme (Décomposition en sous-espaces caractéristiques)**.** *Si $\chi_M = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ alors on a la décomposition en sous-espaces stables $k^n = \oplus_{i=1}^r \ker(M - \lambda_i I_n)^{m_i}$.*

Démonstration. Provient du théorème de décomposition des noyaux et de Cayley–Hamilton. □

Dans une base adaptée à la décomposition ci-dessus, la matrice M est diagonale par blocs ; on choisit alors $D = \mathrm{diag}(\lambda_{i_1} I_{n_1}, \dots, \lambda_{i_r} I_{n_r})$, où $n_i := \dim \ker(M - \lambda_i I_n)^{m_i}$, et $N := M - D$. On va maintenant montrer que l'on peut faire mieux, en particulier, choisir N de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $* \in \{0, 1\}$.

2 Mes premières réductions de Jordan

Cette partie est à savoir !

Définition. On définit la matrice de Jordan

$$J_n \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(k).$$

Pour $\lambda \in k$, on utilisera également $J_n(\lambda) \coloneqq \lambda I_n + J_n$, donnée par $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Lemme 1. *Soient $x \in k^n$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^r x = 0 \neq M^{r-1}x$. Alors la famille $(x, \dots, M^{r-1}x)$ est libre.*

Démonstration. Soient $\beta_0, \dots, \beta_{r-1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{r-1} \beta_i M^i x = 0$. Supposons qu'un des β_i soit non nul et soit r_0 le plus petit élément de $\{0, \dots, r-1\}$ tel que $\beta_{r_0} \neq 0$. Ainsi, on a $\sum_{i=r_0}^{r-1} \beta_i M^i x = 0$ et donc $\sum_{i=r_0}^{r-1} \beta_i M^{i+r-1-r_0} x = 0$. Si $i > r_0$ alors $i + r - 1 - r_0 \geq r$ donc $M^{i+r-1-r_0} x = 0$, ainsi on obtient $\beta_{r_0} M^{r-1} x = 0$ donc $\beta_{r_0} = 0$ ce qui est absurde. Donc tous les β_i sont nuls. □

Théorème (Réduction de Jordan, cas $n = 2$)**.** *Soit $M \in \mathrm{Mat}_2(k)$ avec χ_M scindé. Si M n'est pas diagonlisable alors M est semblable à $J_2(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, où λ est l'unique valeur propre de M.*

Démonstration. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M. On suppose u non diagonalisable. Ainsi, les deux valeurs propres ne sont pas distinctes et donc u possède bien une unique valeur propre. Soit e_2 un vecteur non nul dans $k^2 = \ker(u - \lambda)^2$ (on a bien égalité par Cayley–Hamilton) qui ne soit pas un vecteur propre et posons $e_1 \coloneqq (u - \lambda)e_2$. Alors $(u - \lambda)e_1 = (u - \lambda)^2 e_2 = 0$ donc e_1 est un vecteur propre. Par le Lemme 1, on sait que (e_1, e_2) est libre donc est une base de k^2. Puisque $u(e_2) = \lambda e_2 + e_1$ et que $u(e_1) = \lambda e_1$, la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est bien celle annoncée. □

Lemme 2. *Soit $M \in \mathrm{Mat}_n(k)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\ker M^i \subseteq \ker M^{i+1}$, et s'il y a égalité alors il y a également égalité au rang d'après, i.e. $\ker M^{i+1} = \ker M^{i+2}$.*

Démonstration. On a bien $\ker M^i \subseteq \ker M^{i+1}$ puisque si $M^i x = 0$ alors $M^{i+1}x = M(M^i x) = M0 = 0$. Supposons maintenant que $\ker M^i = \ker M^{i+1}$. On a déjà $\ker M^{i+1} \subseteq \ker M^{i+2}$, et si $x \in \ker M^{i+2}$ alors $Mx \in \ker M^{i+1} = \ker M^i$ donc $M^i(Mx) = 0$ donc $x \in \ker M^{i+1}$. □

Remarque. En particulier, si M est nilpotente d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire $M^p = 0 \neq M^{p-1}$) alors pour tout $i < p$ on a $\dim \ker M^i < \dim \ker M^{i+1}$. En effet, s'il y a égalité on a $\ker M^i = \ker M^{i+1} = \cdots = \ker M^p = k^n$ donc $M^i = 0$ ce qui contredit la définition de p.

Théorème (Réduction de Jordan, cas $n = 3$)**.** *Soit $M \in \mathrm{Mat}_3(k)$ avec χ_M scindé. On suppose que M n'est pas diagonalisable.*

— *On suppose que M possède exactement deux valeurs propres distinctes λ et μ avec $\chi_M = (X-\lambda)^2(X-\mu)$. Alors M est semblable à* $\mathrm{diag}(J_2(\lambda), J_1(\mu)) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ 0 & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$.

— *On suppose que M possède seulement une valeur propre λ. Si* $\dim\ker(M-\lambda) = 2$ *alors M est semblable à* $\mathrm{diag}(J_2(\lambda), J_1(\lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ 0 & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, *sinon* $\dim\ker(M-\lambda) = 1$ *et M est semblable à* $J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Démonstration. Si M possède trois valeurs propres distinctes alors M est diagonalisable. Si M possède exactement deux valeurs propres distinctes, on applique le lemme de décomposition en sous-espaces caractéristiques et le théorème précédent. On suppose maintenant que M possède une unique valeur propre λ et soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M. Par Cayley–Hamilton, l'endomorphisme $u-\lambda$ est nilpotent.

— On suppose que $\dim\ker(u-\lambda) = 2$. Par la Remarque suivant le Lemme 2 on a $\dim\ker(u-\lambda)^2 = 3$ donc $(u-\lambda)^2 = 0$. Soit $e_2 \notin \ker(u-\lambda)$ et posons $e_1 \coloneqq (u-\lambda)e_2 \neq 0$. Alors $e_1 \in \ker(u-\lambda)$, et soit $e_3 \in \ker(u-\lambda)$ tel que (e_1, e_3) soit une base de $\ker(u-\lambda)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est libre puisque $e_2 \notin \mathrm{vect}(e_1, e_3) = \ker(u-\lambda)$, donc est une base de k^3 et on conclut car la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est celle annoncée.

— On suppose $\dim\ker(u-\lambda) = 1$. Montrons que $\dim\ker(u-\lambda)^2 = 2$. Pour cela, on considère l'application $v : \ker(u-\lambda)^2 \to \ker(u-\lambda)$ donnée par la multiplication par $u-\lambda$. Alors $\ker v = \ker(u-\lambda) \cap \ker(u-\lambda)^2 = \ker(u-\lambda)$ donc par le théorème du rang on obtient $\dim\ker(u-\lambda)^2 - \dim\ker(u-\lambda) \leq \dim\ker(u-\lambda)$ donc $\dim\ker(u-\lambda)^2 \leq 2$, d'où finalement $\dim\ker(u-\lambda)^2 = 2$ par le Lemme 2.
Soit maintenant $e_3 \notin \ker(u-\lambda)^2$. Puisque $(u-\lambda)^3 = 0$ (par Cayley–Hamilton), par le Lemme 1 on sait que (e_1, e_2, e_3) est une base de k^3 où $e_2 \coloneqq (u-\lambda)e_3$ et $e_1 \coloneqq (u-\lambda)^2 e_3 = (u-\lambda)e_2$. La matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est alors de la forme annoncée.

□

3 Réduction de Jordan : cas général

Cette partie est pour ceux qui sont à l'aise avec celle qui précède.

Théorème (Réduction de Jordan, version sous-espace caractéristique)**.** *On suppose que $M - \lambda I_n$ est nilpotente.*

— *Il existe une unique suite décroissante α d'entiers strictement positifs $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r \geq 1$ (de somme n) telle que M soit semblable à la matrice* $J_\alpha(\lambda) \coloneqq \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}(\lambda), \ldots, J_{\alpha_r}(\lambda))$.

— *De plus, on a* $r = \dim\ker(M - \lambda I_n)$, *l'entier α_1 est le degré du polynôme minimal de M et le nombre de α_s égaux à $i \in \mathbb{N}$ (i.e. le nombre de blocs de taille i) est donné par* $2\dim\ker(M-\lambda)^i - \dim\ker(M-\lambda)^{i+1} - \dim\ker(M-\lambda)^{i-1}$.

Une telle suite α est une *partition* de n. En utilisant le lemme de décomposition en sous-espaces caractéristiques, on en déduit la forme générale du théorème de réduction.

Théorème (Réduction de Jordan, version générale)**.** *On suppose que χ_M est scindé. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de M, il existe des partitions $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}$ telles que M soit semblable à la matrice* $\mathrm{diag}(J_{\alpha^{(1)}}(\lambda_1), \ldots, J_{\alpha^{(r)}}(\lambda_r))$. *Il y a unicité à permutation près des $J_{\alpha^{(i)}}(\lambda_i)$.*

Pour montrer la version sous-espace caractéristique, il suffit de montrer le cas $\lambda = 0$, *i.e.* la matrice M est nilpotente : le cas $M - \lambda I_n$ nilpotente s'obtiendra en écrivant $M = (M - \lambda I_n) + \lambda I_n$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à M. On suit le schéma mis en place en dimension 2 et 3 : si p est l'indice de nilpotence de u (qui est alors le degré du polynôme minimal de u), on veut choisir un vecteur v qui ne soit pas dans $\ker u^{p-1}$ et considérer la famille libre (par le Lemme 1) $\mathcal{B}_v := (u^{p-1}(v), \dots, u(v), v)$. La matrice de u dans cette base est alors J_p. Pour continuer, on aimerait choisir un vecteur $w \in \ker u^{p-i+1} \setminus \ker u^{p-i}$ avec $i \geq 1$ le plus petit possible, et considérer la famille libre $\mathcal{B}_w = (u^{p-i}(w), \dots, w)$ dans laquelle la matrice de u est J_{p-i+1}. La seule chose à garantir est la suivante : on voudrait que la famille $\mathcal{B}_v \sqcup \mathcal{B}_w$ soit libre. C'est l'objectif du Lemme 3.

Lemme 3. *On peut trouver une suite de sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ de k^n tels que*

i) pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, le sous-espace vectoriel E_i est un supplémentaire de $\ker u^{i-1}$ dans $\ker u^i$;

ii) pour chaque $i \in \{2, \dots, p\}$, $u(E_i) \subseteq E_{i-1}$.

De plus :

- *on a $k^n = \oplus_{i=1}^p E_i$;*
- *pour $i \geq 2$ on a nécessairement $u(E_i) \simeq E_i$, i.e. la restriction de u à E_i est injective.*

Démonstration. On procède par récurrence descendante sur i. Pour $i = p$, on choisit pour E_p n'importe quel supplémentaire de $\ker u^{p-1}$ dans $\ker u^p = k^n$. Si maintenant $i \in \{1, \dots, p-1\}$, puisque $E_{i+1} \subseteq \ker u^{i+1}$ on a $u(E_{i+1}) \subseteq \ker u^i$. Il suffit maintenant de montrer que $u(E_{i+1})$ et $\ker u^{i-1}$ sont en somme directe. Soit $x \in u(E_{i+1}) \cap \ker u^{i-1}$, que l'on écrit $x = u(y)$ avec $y \in E_{i+1}$. Par hypothèse on a $u^{i-1}(x) = u^i(y) = 0$ donc $y \in E_{i+1} \cap \ker u^i = \{0\}$ car E_{i+1} et $\ker u^i$ sont en somme directe, par construction de E_{i+1}. On construit alors E_i en complétant $u(E_{i+1})$ en un supplémentaire de $\ker u^{i-1}$ dans $\ker u^i$. L'assertion sur la somme directe est claire puisque

$$\begin{aligned}
k^n &= \ker u^p \\
&= E_p \oplus \ker u^{p-1} \\
&= E_p \oplus (E_{p-1} \oplus \ker u^{p-2}) \\
&\vdots \\
&= E_p \oplus \cdots \oplus E_1 \oplus \ker \mathrm{id}_{k^n} \\
&= E_p \oplus \cdots \oplus E_1,
\end{aligned}$$

et celle sur l'injectivité de $u|_{E_i}$ également, puisque le noyau de $u|_{E_i}$ est $\ker u \cap E_i \subseteq \ker u^{i-1} \cap E_i = \{0\}$ par définition de E_i (rappelons qu'ici $i \geq 2$ donc on a bien $\ker u \subseteq \ker u^{i-1}$). $\square$

On peut maintenant reprendre la démonstration du théorème de Jordan (cas nilpotent). Choisissons une base $\mathcal{B}_p$ de E_p. Pour i descendant de p à 2, soit $\mathcal{B}'_{i-1}$ une famille qui complète $u(\mathcal{B}_i)$ en une base $\mathcal{B}_{i-1}$ de E_{i-1}. Puisque $k^n = \oplus_{i=1}^p E_i$, la concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ forme une base de k^n. En posant $\mathcal{B}'_p := \mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}'_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}\}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_p &= \{v_{p,j}\}_{j \leq n_p}, \\
\mathcal{B}_{p-1} &= u(\mathcal{B}_p) \sqcup \mathcal{B}'_{p-1} \\
&= \{u(v_{p,j})\}_{j \leq n_p} \sqcup \{v_{p-1,j}\}_{j \leq n_{p-1}}, \\
\mathcal{B}_{p-2} &= u(\mathcal{B}_{p-1}) \sqcup \mathcal{B}'_{p-1}
\end{aligned}$$

$$= \left\{u^2(v_{p,j})\right\}_{j\leq n_p} \sqcup \{u(v_{p-1,j})\}_{j\leq n_{p-1}} \sqcup \{v_{p-2,j}\}_{j\leq n_{p-2}},$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{u^{p-1}(v_{p,j})\right\}_{j\leq n_p} \sqcup \left\{u^{p-2}(v_{p-1,j})\right\}_{j\leq n_{p-1}} \sqcup \left\{u^{p-3}(v_{p-2,j})\right\}_{j\leq n_{p-2}} \sqcup \cdots \sqcup \{v_{1,j}\}_{j\leq n_1}.$$

Ainsi, si pour chaque $i \in \{1,\dots,p\}$ et $j \in \{1,\dots,n_i\}$ on note $\widetilde{\mathcal{B}}_{i,j} := \{u^{i-1}(v_{i,j}),\dots,v_{i,j}\}$, la concaténation des bases $(\mathcal{B}_i)_{1\leq i\leq p}$ coïncide avec la concaténation des $(\widetilde{\mathcal{B}}_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n_i}$. La matrice de u dans la base

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{p,1} \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{\mathcal{B}}_{p,n_p} \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{\mathcal{B}}_{1,1} \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{\mathcal{B}}_{1,n_1}$$

est alors $\operatorname{diag}(J_p,\dots,J_p,\dots,J_1,\dots,J_1)$, chaque J_i apparaissant n_i fois : c'est $J_\alpha := J_\alpha(0)$, où $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r)$ est la partition contenant exactement n_i fois l'entier i pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$.

Finalement, par définition de l'indice de nilpotence, on a $E_p \neq \{0\}$ donc $n_p \neq 0$ donc $\alpha_1 = p$ est bien le degré du polynôme minimal de u. Chaque bloc J_i apporte exactement un vecteur dans le noyau de u donc $\dim\ker u$ est bien le nombre r $(= \sum_{i=1}^p n_i)$ de blocs. Pour l'unicité de la partition α, remarquons d'abord que le nombre de blocs de taille i (les blocs J_i) est, par construction et le Lemme 3,

$$\begin{aligned} n_i = \#\mathcal{B}'_i = \#\mathcal{B}_i - \#u(\mathcal{B}_{i+1}) &\\ = \dim E_i - \#\mathcal{B}_{i+1} &\\ = \dim E_i - \dim E_{i+1} &\\ = \left(\dim\ker u^i - \dim\ker u^{i-1}\right) - \left(\dim\ker u^{i+1} - \dim\ker u^i\right) &\\ = 2\dim\ker u^i - \dim\ker u^{i+1} - \dim\ker u^{i-1}, & \qquad (\clubsuit) \end{aligned}$$

qui est bien au passage la formule annoncée. Soit maintenant β une autre partition telle que u ait une matrice de la forme J_β et on veut montrer que $\beta = \alpha$. On peut par exemple donner deux justifications. La matrice de u dans une bonne base $\mathcal{C}$ étant de la forme J_β, la base $\mathcal{C}$ est de la forme précédente (avec des entiers n'_i). De plus, ils définissent comme avant des supplémentaires de $\ker u^{i-1}$ dans $\ker u^i$ donc le calcul du nombre de blocs de taille i donne comme en ($\clubsuit$). La deuxième justification utilise le lemme suivant.

Lemme. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\dim\ker J_m^i = \min(i,m)$ et $\dim\ker J_m^{i+1} - \dim\ker J_m^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i \leq m-1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$*

Ainsi, si $\beta = (\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_s)$, soit n'_i le nombre de i dans β. Il y a dans J_β exactement n'_i blocs de taille i et le Lemme donne

$$\begin{aligned} \dim\ker u^{i+1} - \dim\ker u^i &= \sum_{t=1}^s (\dim\ker J_{\beta_t}^{i+1} - \dim J_{\beta_t}^i) \\ &= \sum_{m=1}^n n'_m (\dim\ker J_m^{i+1} - \dim J_m^i) \\ &= \sum_{m=1}^i n'_m 0 + \sum_{m=i+1}^n n'_m 1 \\ &= \sum_{m=i+1}^n n'_m, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(\dim\ker u^i - \dim\ker u^{i-1}) - (\dim\ker u^{i+1} - \dim\ker u^i) &= \sum_{m=i}^{n} n'_m - \sum_{m=i+1}^{n} n'_m \\ &= n'_i\end{aligned}$$

donc par (♣) on a bien $n'_i = n_i$ pour tout i.

Remarque. On a vu que $2\dim\ker u^i - \dim\ker u^{i+1} - \dim\ker u^{i-1} \geq 0$ (c'est le nombre n_i de blocs de taille i, donc nécessairement positif). On peut retrouver ce résultat en généralisant ce qu'on a montré dans la preuve du cas $n = 3$: le noyau de l'application $\ker u^{i+1} \to \ker u^i / \ker u^{i-1}$ induite par u est $\ker u^i$.

4 Quelques applications

Théorème. *On suppose k de caractéristique nulle. Les matrices M et $2018M$ sont semblables si et seulement si M est nilpotente.*

Démonstration. Si M et $2018M$ sont semblables alors elles ont les mêmes valeurs propres. Ainsi, si λ est valeur propre de M alors $\mu \coloneqq 2018\lambda$ est valeur propre de $2018M$ (fait général) donc μ est valeur propre de M (par hypothèse) donc $2018\mu = 2018^2\lambda$ est valeur propre de $2018M$, etc. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2018^k\lambda$ est valeur propre de M. Puisque M ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres et que $2018 \in k^\times$ est d'ordre infini, on en déduit que $\lambda = 0$. Ceci étant valable pour une valeur propre quelconque de M, on en déduit que M est nilpotente.

Réciproquement, si M est nilpotente alors $2018M$ aussi donc toutes les deux ont pour polynôme caractéristique X^n, qui est scindé sur k. On peut donc considérer la réduction de Jordan de ces deux matrices, dans k. On a $\dim\ker M^i = \dim\ker(2018M)^i$ pour tout i (car $2018 \neq 0$) donc par (♣) les réduites de Jordan de M et $2018M$ ont les mêmes nombres de blocs de taille i pour tout i donc M et $2018M$ sont semblables (sur k). □

Théorème. *On suppose $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toute matrice de $\mathrm{Mat}_n(k)$ est semblable à sa transposée.*

Démonstration. On suppose tout d'abord $k = \mathbb{C}$. Par le théorème de réduction de Jordan, il suffit de montrer le résultat pour les matrices J_m. On remarque que $J_m = PJ_m^tP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$ (on renverse la base) donc c'est bon. Sur $\mathbb{R}$, c'est bon aussi car deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$. Rappelons rapidement une démonstration : si $M = PNP^{-1}$ avec M, N réelles, on écrit $P = Q+iR$ avec Q, R réelles. La fonction $t \mapsto \det(Q+tR)$ est polynomiale non nulle sur $\mathbb{C}$ donc non nulle sur $\mathbb{R}$ (sinon elle aurait une infinité de zéros sur $\mathbb{C}$ donc y serait nulle !), et en identifiant parties réelles et imaginaires dans $MP = PN$ on en déduit que si $Q + tR$ est inversible alors $M(Q + tR) = (Q + tR)N$. □

Remarque. Le Théorème peut se démontrer sur n'importe quel corps via la *réduction de Frobenius*.

Corollaire. *Toute matrice de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice symétrique.*

Remarque. Ce dernier résultat est *faux* sur $\mathbb{R}$!

Démonstration. Encore une fois, il suffit de le montrer pour un bloc de Jordan J_m. On sait qu'il existe une matrice symétrique inversible P (celle de la démonstration du théorème précédent) telle que $J_m = PJ_m^tP^{-1}$. Étant symétrique inversible, la matrice P définit une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{C}$ donc est équivalente à I_n, c'est-à-dire il existe Q telle que $P = QI_nQ^t = QQ^t$. Finalement, la matrice $Q^{-1}J_mQ$ est semblable à J_m, et symétrique :

$$\begin{aligned}(Q^{-1}J_mQ)^t &= Q^tJ_m^tQ^{-t} \\ &= Q^tP^{-1}J_mPQ^{-t} \\ &= Q^tQ^{-t}Q^{-1}J_mQQ^tQ^{-t} \\ &= Q^{-1}J_mQ.\end{aligned}$$

□

Exercice. Trouver une matrice symétrique semblable à J_2.