Matrices creuses

Complément de calcul formel pour l'agrégation
ENS Rennes

Salim Rostam

Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{M}_n(K)$ l'algèbre des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans K.

1 Premiers contacts

1. Rappeler la complexité de l'opération $\mathrm{M}_n(K) \times K^n \ni (M, v) \mapsto Mv$ et celle du produit matriciel dans $\mathrm{M}_n(K)$. Implanter ces opérations pour des matrices (« naïves » ou de Sage).

Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\phi(n) = o(n)$. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ est *ϕ-creuse* si

$$\#\{j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} \neq 0\} \leq \phi(n),$$

pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

2. Donner des exemples de matrices creuses et générer des matrices creuses dans Sage en utilisant une fonction déjà existante.
3. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$ une matrice creuse. Donner la complexité des opérations $K^n \ni v \mapsto Mv$ et $\mathrm{M}_n(K) \ni N \mapsto MN$. Les éléments Mv et MN sont-ils creux ?
4. Proposer une implantation des matrices creuses, incluant les opérations précédentes et toute autre opération ou fonction utile (sur un corps K quelconque). Pourquoi la somme de deux matrices creuses est-elle moins facile à implanter que le produit ? (On pourra omettre cette implantation.)
5. Comparer la vitesse de calcul entre votre produit dense $\times$ dense et votre produit creux $\times$ dense.
6. Comment calculer les puissances d'une matrice creuse ? Comparer avec les méthodes habituelles.

2 Intermède polynômes

1. Implanter l'algorithme de division euclidenne dans $K[X]$.
2. Implanter l'algorithme d'Euclide dans $K[X]$.
3. Implanter un algorithme d'Euclide étendu dans $K[X]$.

3 Suites récurrentes linéaires

(Référence pour la suite : le texte de type agreg *Matrices creuses et algorithme de Wiedeman* de V. Pilaud et *Résolution de systèmes linéaires creux : l'algorithme de Wiedemann* d'A. Chambert-Loir.)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{d-1} \in K$. Soit $(u_k) \in K^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la récurrence linéaire de degré d suivante :

$$u_{k+d} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u_{k+i}, \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On note σ l'opérateur de décalage sur $K^{\mathbb{N}}$, donné par $\sigma(v)_n = v_{n+1}$ pour tout $v \in K^{\mathbb{N}}$. L'*idéal annulateur* de u est

$$\mathcal{I}(u) := \{P \in K[X] : P(\sigma)(u) \text{ est la suite nulle}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{I}(u)$ est un idéal non nul de $K[X]$.

   On admet la Proposition suivante.

Proposition. *Soit $e \geq d$. Un polynôme $P = \sum_{i=0}^{e} p_i X^i \in K[X]$ est dans $\mathcal{I}(u)$ si et seulement s'il existe $R \in K_{e-1}[X]$ tel que*

$$PU \equiv R \mod X^{2e},$$

où $U := \sum_{i=0}^{2e-1} u_{2e-1-i} X^i$.

2. Implanter la recherche d'un tel polynôme P.
3. Appliquer ce résultat à la recherche d'une récurrence linéaire pour votre suite récurrente favorite.

4 Inverse d'une matrice creuse

Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$ une matrice creuse inversible.

1. Rappeler pourquoi la donnée d'un polynôme annulateur de M avec un coefficient constant non nul permet de calculer efficacement M^{-1}.

Soient $x, y \in K^n$ tirés « aléatoirements » et soit (u_k) la suite définie par $u_k := x^\intercal M^k y$.

2. On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   (a) Expliquer pourquoi la donnée d'un élément non nul de $\mathcal{I}(u)$ fournit en général un polynôme annulateur de M.
   (b) En déduire un algorithme pour inverser une matrice creuse.
   (c) Comparer l'efficacité de cet algorithme avec un algorithme d'inversion habituel.
   (d) Veut-on vraiment inverser les matrices creuses ? Que veut-on plutôt faire ?
3. Que dire si K est un corps fini ?

5 On prend les mêmes et on recommence

Reprendre les questions précédentes avec les matrices de Toeplitz, de Hankel, ...

Références

[Pi] V. Pilaud, **Matrices creuses et algorithme de Wiedemann**. http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Vincent.Pilaud/enseignement/agreg/wiedemann/wiedemann.pdf.

[AL] J. Abdeljaoued et H. Lombardi, *Méthodes Matricielles - Introduction à la Complexité Algébrique*. https://arxiv.org/pdf/1604.00795.pdf.