Transformée de Fourier de la gaussienne

Salim Rostam

29 mai 2014

Ce développement présente trois méthodes de calcul d'intégrale, appliquées au calcul important de la transformée de Fourier de la gaussienne. Tout d'abord, définissons ce de quoi on parle.

Définition. *Pour α un réel strictement positif, on définit la gaussienne G_α par $\forall x \in \mathbb{R}, G_\alpha(x) := e^{-\alpha x^2}$.*

Définition. *Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}x$.*

Ainsi, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}_\alpha(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}x$ et c'est cette intégrale que l'on cherche à calculer.

Théorème. *On a $\widehat{G}_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$.*

Remarque. En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient $\widehat{G}_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} G_{\frac{1}{2}}$.

1 Équation différentielle

Montrons que $\widehat{G}_\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$; on va utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale.

- $\forall \xi \in \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$ est (mesurable et) intégrable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \xi \mapsto e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\right)\right| = \left|-ix e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\right| \leq |x| e^{-\alpha x^2}$ qui est indépendant de ξ et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\widehat{G}_\alpha$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G_\alpha}'(\xi) = i \int_{\mathbb{R}} -x e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}x$ (note [1]). On intègre alors par parties (par rapport à x) : pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{G_\alpha}'(\xi) = i \left\{ \left[\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \right]_{\mathbb{R}} + \frac{i\xi}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}x \right\} = -\frac{\xi}{2\alpha} \widehat{G}_\alpha(\xi)$$

Ainsi, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}_\alpha(\xi) = \widehat{G}_\alpha(0) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$; comme $\widehat{G}_\alpha(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \,\mathrm{d}x$, on obtient (en faisant le changement de variable $y = \sqrt{\alpha} x$) l'égalité $\widehat{G}_\alpha(0) =$

1. On écrit temporairement $\widehat{G_\alpha}$ au lieu de $\widehat{G}_\alpha$ car la notation $\widehat{G}'_\alpha$ pourrait porter à confusion.

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ (note [2]). Finalement, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$ donc on retrouve bien le résultat annoncé $\widehat{G}_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$.

2 Théorème des zéros isolés

Commençons par un petit calcul :

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}_\alpha(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha \left[x^2 + \frac{i\xi}{\alpha} x\right]} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha \left[\left(x + \frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4\alpha^2}\right]} \, \mathrm{d}x \\
\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}_\alpha(\xi) &= e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha \left(x + \frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} \, \mathrm{d}x \qquad (1)
\end{aligned}$$

donc on aimerait bien faire le changement de variable $y = x + \frac{i\xi}{2\alpha}$ dans cette dernière intégrale. Malheureusement, le changement de variable n'est pas réel donc on n'a pas le droit !

Dans l'optique d'utiliser le théorème des zéros isolés, on va donc calculer cette intégrale pour $i\xi \in \mathbb{R}$. Ainsi, posons, pour $z \in \mathbb{C}$, $F(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-xz} \, \mathrm{d}x$ et montrons que cette fonction est holomorphe :

- $\forall z \in \mathbb{C}, x \mapsto e^{-\alpha x^2} e^{-xz}$ est mesurable sur $\mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, z \mapsto e^{-\alpha x^2} e^{-xz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$;
- $\forall M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall |z| \leq M, |e^{-\alpha x^2} e^{-xz}| = e^{-\alpha x^2} e^{-x \operatorname{Re} z} \leq e^{-\alpha x^2} e^{M|x|}$ qui est indépendant de z et intégrable sur $\mathbb{R}$;

donc par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On calcule à présent F sur $\mathbb{R}$: par le même calcul qui a été mené en (1), on trouve : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = e^{\frac{t^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\left(x + \frac{t}{2\alpha}\right)^2} \, \mathrm{d}x$. Ainsi, on peut faire notre changement de variable $y = x + \frac{t}{2\alpha}$ pour obtenir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = e^{\frac{t^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{t^2}{4\alpha}}$$

Ainsi, les fonctions F et $t \mapsto e^{\frac{t^2}{4\alpha}}$ coïncident sur $\mathbb{R}$: elles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ donc par le théorème des zéros isolés elles coïncident sur $\mathbb{C}$. En particulier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, F(i\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{(i\xi)^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

et comme $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}_\alpha(\xi) = F(i\xi)$ on retrouve $\widehat{G}_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$.

2. Je rappelle dans l'annexe A une méthode pour calculer $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y$.

3 Intégrale d'une fonction holomorphe

On va maintenant calculer $\widehat{G}_\alpha(\xi)$ sans montrer la régularité d'une certaine fonction.

Fixons $\xi \in \mathbb{R}$ et reprenons l'égalité (1) :

$$\widehat{G}_\alpha(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\left(x+\frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

Comme la fonction $z \mapsto e^{-\alpha z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, son intégrale sur tout contour fermé $\mathcal{C}^1$ par morceaux est nulle. En particulier, $\forall R > 0, \int_{\gamma_R} e^{-\alpha z^2} \, \mathrm{d}z = 0$ où γ_R est le chemin défini dans la figure 1.

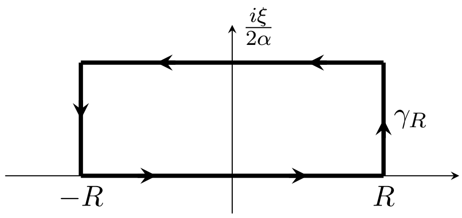

Figure 1 – Définition du chemin γ_R (illustration pour $\xi > 0$)

Ainsi :

$$\forall R > 0, 0 = \int_{-R}^{R} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R+it)^2} i \, \mathrm{d}t - \int_{-R}^{R} e^{-\alpha\left(x+\frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} \, \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(-R+it)^2} i \, \mathrm{d}t \quad (2)$$

et on a :

- $\int_{-R}^{R} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x \xrightarrow{R \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$;
- $\int_{-R}^{R} e^{-\alpha\left(x+\frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} \, \mathrm{d}x \xrightarrow{R \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\left(x+\frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} \, \mathrm{d}x = e^{\frac{\xi^2}{4\alpha}} \widehat{G}_\alpha(\xi)$;
- $\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R+it)^2} i \, \mathrm{d}t \xrightarrow{R \to +\infty} 0$ car on a la majoration suivante :

$$\left| \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R+it)^2} i \, \mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{\mathrm{Re}(-\alpha(R+it)^2)} \, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(R^2-t^2)} \, \mathrm{d}t \right| = e^{-\alpha R^2} \left| \int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{\alpha t^2} \, \mathrm{d}t \right|$$

(note [3]), la dernière intégrale étant une constante (finie) indépendante de R et $\alpha > 0$;

3. Je n'ai pas majoré à l'intérieur des valeurs absolues, c'est juste que ξ peut être négatif.

– $\int_0^{\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\alpha(-R+it)^2} i \,\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to+\infty} 0$ par la même majoration que précédemment.

Finalement, en faisant tendre R vers $+\infty$ dans l'égalité (2) on obtient $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{\frac{\xi^2}{4\alpha}} \widehat{G}_\alpha(\xi)$ *i.e.* $\widehat{G}_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$.

4 Et plus si affinités...

Généralisation à $\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\alpha > 0$. On a montré la chose suivante :

$$\forall \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

Fixons $\xi \in \mathbb{R}$; on va encore utiliser le théorème des zéros isolés, pour montrer que cette égalité (a un sens et) est valable pour $\alpha \in \{\operatorname{Re} > 0\}$. Pour cela, en considérant la détermination principale du logarithme on peut poser $\sqrt{\alpha} := e^{\frac{1}{2}\log\alpha}$ d'où le membre de droite $\alpha \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$ est holomorphe sur $\{\operatorname{Re} > 0\}$. Pour l'autre membre on utilise le théorème d'holomorphie sous l'intégrale :

– $\forall \operatorname{Re}\alpha > 0, x \mapsto e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
– $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \mapsto e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}$ est holomorphe sur $\{\operatorname{Re} > 0\}$ (cette fois sans difficulté) ;
– $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \operatorname{Re}\alpha \geq \varepsilon, \left| e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \right| = e^{\operatorname{Re}(-\alpha x^2)} \leq e^{-\varepsilon x^2}$ qui est indépendant de α et intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc conclure que la formule $\widehat{G}_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}}$ se généralise à $\operatorname{Re}\alpha > 0$ (on a bien également $\operatorname{Re}\frac{1}{4\alpha} > 0$)[4].

Généralisation à $\mathbb{R}^n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable en base orthonormée[5] avec $\operatorname{Sp}(A) \subseteq \{\operatorname{Re} > 0\}$. On définit alors $G_A(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

$$G_A(x) := e^{-\langle Ax, x\rangle}$$

Comme la matrice A est diagonalisable en base orthonormée (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$), en notant (λ_j) les valeurs propres de A et (x_j) les coordonnées de x dans une base d'orthodiagonalisation (la coordonnée x_j correspondant à un vecteur propre associé à λ_j) on a $G_A(x) = \prod_{j=1}^n e^{-\lambda_j x_j^2} = \prod_{j=1}^n G_{\lambda_j}(x_j)$ donc $G_A \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, $\widehat{G}_A$ est bien définie et on a :

$$\begin{aligned}\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \widehat{G}_A(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} G_A(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \left(G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j} \right) \mathrm{d}x \qquad (3)\end{aligned}$$

4. On étend la définition de G_β à $\operatorname{Re}\beta > 0$, qui reste alors une fonction L^1.
5. C'est-à-dire une matrice normale, *i.e.* $AA^* = A^*A$.

D'après le théorème de Fubini–Tonelli, $\int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{j=1}^n G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j} \right| \mathrm{d}x = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} G_{\lambda_j}(x_j) \, \mathrm{d}x_j = \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}} < +\infty$ donc $x \mapsto \prod_{j=1}^n \left(G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j} \right)$ est un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ donc d'après le théorème de Fubini, on peut permuter les intégrales dans (3) pour trouver :

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \widehat{G}_A(\xi) &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} G_{\lambda_j}(x_j) e^{-ix_j\xi_j} \, \mathrm{d}x_j \\
&= \prod_{j=1}^n \widehat{G}_{\lambda_j}(\xi_j) \\
&= \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}} e^{-\frac{\xi_j^2}{4\lambda_j}} \\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n \lambda_j}} e^{-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{\lambda_j}\xi_j} \\
\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \widehat{G}_A(\xi) &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}\langle A^{-1}x, x\rangle}
\end{aligned}$$

autrement dit $\widehat{G}_A = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} G_{\frac{1}{4}A^{-1}}$.

Remarque. Pour $\alpha \in \{\mathrm{Re} > 0\}$ et $A := \alpha I_n$ on obtient que la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-\alpha\|x\|^2}$ est $\xi \mapsto \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{4\alpha}\|\xi\|^2}$.

A Calcul de l'intégrale de Gauss

On désire calculer $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$. Pour cela, on va calculer I^2 en passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \text{ (par le théorème de Fubini–Tonelli)} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}\theta \\
I^2 &= \pi
\end{aligned}$$

donc on a bien $I = \sqrt{\pi}$.