$\boxed{\text{thm Rothstein–Trager (Saux Picart)}}$

$$\int \frac{P}{Q} = \sum c_i \operatorname{Ln} P_i \qquad \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{P_i'}{P_i} \; (*) \qquad U_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P_j$$

$(*)$ devient $P \prod_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} c_i U_i P_i' Q \quad (**)$.

ainsi, $\boxed{Q \mid \prod_{i=1}^{n} P_i}$ et $P_i \mid \sum_{j=1}^{n} c_j U_j P_j' Q$

$P_i \mid U_j \quad \forall j \neq i$ donc $P_i \mid c_i U_i P_i' Q$.

or : $\begin{cases} P_i \wedge U_i = 1 \\ P_i \wedge P_i' = 1 \end{cases}$ ainsi $\boxed{P_i \mid Q}$. $\boxed{\prod_{i=1}^{n} P_i \mid Q}$

Donc $\boxed{Q = \prod_{i=1}^{n} P_i}$.

$(**)$ devient $\boxed{P = \sum_{i=1}^{n} c_i U_i P_i'}$ $\qquad P_i = (P - c_i Q') \wedge Q$.

$Q' = \sum_{i=1}^{n} P_i' U_i$ donc $P - c_i Q' = \sum_{j=1}^{n} c_j P_j' U_j - c_i \sum_{j=1}^{n} P_j' U_j$

donc $(P - c_i Q') \wedge Q = \left( \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_i) P_j' U_j \right) \wedge \underbrace{Q}_{\prod P_i} = \prod_{k=1}^{n} \left( \left( \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_i) P_j' U_j \right) \wedge P_k \right)$

Pour $\cancel{j \neq i}$, $P_k \mid j \neq k$, $P_k \mid U_j$ donc $\left( \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_i) P_j' U_j \right) \wedge P_k = \left( (c_k - c_i) P_k' U_k \right) \wedge P_k$

Pour $k \neq i$, $P_k \wedge P_k' = 1$ donc pour $k \neq i$, $(\underbrace{c_k - c_i}_{\neq 0}) P_k' U_k \wedge P_k = 1$.

$P_k \wedge U_k = 1$

d'où $\boxed{(P - c_i Q') \wedge Q = P_i}$.

Les $c_i$ sont racine de $R(C) := \operatorname{Res}_X (P - CQ', Q)$.

Soit $c$ une racine de $R$, i.e. $\mathrm{Res}(P-cQ', Q) = 0$.

Soit $T$ un facteur irréductible commun à $P-cQ'$ et $Q$
(de deg $\geq 1$)

$(P-cQ')$ $T \mid Q = \prod P_i$ donc $T \mid P_{i_0}$ pour un unique $P_{i_0}$.

$$P - cQ' = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c) P_i' U_i$$

$T \mid P-cQ'$ donc $T \mid (c_{i_0} - c) \underbrace{P_{i_0}' U_{i_0}}$ donc $T \mid \underbrace{(c_{i_0} - c)}_{=0}$.