Théorème de Molien

$\sum_{h}^{\text{G}}$ G sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. $\frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\frac{1}{\det(I_n - XA)} = \sum_{d=0}^{\infty}(\dim \mathbb{C}[X]_d^G)X^d$.

Remarque 1 $g\cdot P := P\circ g^{-1}\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots \\ X_n\end{pmatrix}$. $G \curvearrowright \mathbb{C}[X_1,\dots X_n] = \mathbb{C}[X]$

$G \curvearrowright \mathbb{C}[X]_d$.

Remarque 2 $R : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X] \\ P \longmapsto \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G} A\cdot P \end{array}\right.$ $R_d := R|_{\mathbb{C}[X]_d}$.

R est un projecteur et $\operatorname{im} R_d = \mathbb{C}[X]_d^G$.

En effet, $R^2 P = \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G} A\cdot RP = \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\frac{1}{\#G}\sum_{B\in G}(AB)\cdot P$

$= \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\underbrace{\frac{1}{\#G}\sum_{B\in G} B\cdot P}_{R\cdot P} = R\cdot P$.

finalement, comme ci-dessus on montre que $\operatorname{im} R_d \subseteq \mathbb{C}[X]_d^G$ (faire comme avant $B\cdot\sum_{A\in G} A\cdot P$).

Si $P\in\mathbb{C}[X]_d^G$, $A\cdot P = P$ $\forall A\in G$ donc $R_d P = P$

$\dim \mathbb{C}[X]_d^G = \operatorname{rg} R_d = \operatorname{tr} R_d$. Or, $R_d = \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\rho_{d,A}$

donc $\operatorname{tr} R_d = \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\chi_d(A)$; ainsi, $\sum_{d=0}^{\infty}(\dim\mathbb{C}[X]_d^G)X^d = \sum_{d=0}^{\infty}\frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\chi_d(A)X^d$

$= \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\chi_d(A^{-1})$

$$\boxed{= \frac{1}{\#G}\sum_{A\in G}\left(\sum_{d=0}^{\infty}\chi_d(A^{-1})X^d\right)}$$

Reste à montrer que $\sum_{d=0}^{\infty}\chi_d(A^{-1})X^d = \frac{1}{\det(I_n - XA)}$

$A^{\#G} = 1$ donc (on est sur $\mathbb{C}$) A est diagonalisable : $A = PDP^{-1}$

$D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$.

ainsi, $\rho_A = \rho_{PDP^{-1}} = \rho_P\,\rho_D\,\rho_{P^{-1}}$ donc $\chi_d(A) = \operatorname{tr}(\rho_{d,P}\,\rho_{d,D}\,\rho_{d,P^{-1}})$

donc $\boxed{\chi_d(A) = \chi_d(D)}$.

$\chi_d(D^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho_{d,D^{-1}})$.

ρ_d prend des éléments de $\mathbb{C}[X]_d$, dont une base est $(X^\alpha)_{|\alpha|=d}$.

$$\rho_{d,D^{-1}}(X^\alpha) = D^{-1}\cdot X^\alpha = X^\alpha\left(D^{2}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) = X^\alpha\begin{pmatrix}\lambda_1^{2}x_1\\ \vdots\\ \lambda_n^{2}x_n\end{pmatrix}$$

$$= \lambda^{-\alpha} X^\alpha$$

$(\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

Ainsi, $\mathrm{tr}(\rho_{d,D^{-1}}) = \sum_{|\alpha|=d} \lambda^{2\alpha}$ donc :

$$\sum_{d=0}^{\infty} \chi_d(A^{-1})X^d = \sum_{d=0}^{\infty} \chi_d(D^{-1})X^d = \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=d} \lambda^\alpha X^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \lambda^\alpha X^\alpha \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i^j X_i^j = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i X_i}$$

$$= \frac{1}{\det(I-XA)}$$

Finalement, on retrouve bien $\dfrac{1}{\det(I-XA)} = \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbb{C}[X]_d^G)X^d$.

La série ~~formelle~~ associée à la série formelle possède un rayon 11'17.

de convergence ≥ 1, par produit de Cauchy $(*)$. En effet, $A^{\#G} = I$

donc $|\lambda_i| = 1 \ \forall i$.

12'13.