$V(P) := \{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \ / \ P(x,y)=0\}$. (Thm Bézout) (sans preuve) $V := V(P)\cap V(Q)$. Res $=0 \iff \exists$ facteur commun de deg >0 dans $A[X]$.

$$R_X := \mathrm{Res}_X(P,Q) \in \mathbb{C}[Y] \qquad R_Y := \mathrm{Res}_Y(P,Q)\in\mathbb{C}[X].$$

$$R_X, R_Y \neq 0$$

(1'30)

1 $\#V \overset{3}{\leq} dd' \overset{2}{\leq} (dd')^2 \overset{1}{<} \infty$

1

$V(P) := \{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \ / \ P(x,y)=0\}$. $\qquad V := V(P)\cap V(Q)$.

$$\#V \overset{3}{\leq} dd' \overset{2}{\leq} (dd')^2 \overset{1}{<} \infty$$

1 $R_X := \mathrm{Res}_X(P,Q)\in\mathbb{C}[Y] \qquad R_Y := \mathrm{Res}_Y(P,Q)\in\mathbb{C}[X]$.

$\boxed{R_X, R_Y \neq 0}$ car $P\wedge Q = 1$.

Si $(x,y)\in V$ alors y est racine commune de $P(X,y)$ et $Q(X,y)$ donc y est racine de R_X $\quad (R_X(y) = \mathrm{Res}_X(P(X,y), Q(X,y)))$.

De même x est racine de R_Y. Donc $\#V \leq \deg R_X \deg R_Y < \infty$.

2 $P = \sum_{i=0}^{n} P_i(X)Y^i \quad n\leq d \quad \deg P_i \leq d-i \qquad Q = \sum_{j=0}^{m} Q_j(X)Y^j \quad m \leq d' \quad \deg Q_j \leq d'-j$.

$$R_X = \begin{array}{|ccccc|l} P_n & \cdots & P_0 & & & \\ & \ddots & & \ddots & & m \\ & & P_n & \cdots & P_0 & \\ Q_m & \cdots & Q_0 & & & \\ & \ddots & & \ddots & & n \\ & & Q_m & \cdots & Q_0 & \end{array} = |(M_{ij})|$$

$j > i$ $\qquad i > j$

Pour $1\leq i\leq m$

$$M_{ij} = \begin{cases} P_{n-(j-i)} & i\leq j\leq i+n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $m+1 \leq i \leq m+n$

$$M_{ij} = \begin{cases} Q_{i-j} & i-m \leq j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$R_y = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m+n} M_{i\sigma(i)}$$

$$\deg \prod_{i=1}^{m+n} M_{i\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{m} \deg M_{i\sigma(i)} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \deg M_{i\sigma(i)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} d-(n-(\sigma(i)-i)) + \sum_{i=m+1}^{m+n} d' - \cancel{(i-\sigma(i))}$$

$$\leq md - nm + nd' = (\underbrace{d-n}_{\geq 0})(\underbrace{m-d'}_{\leq 0}) + dd'$$

$$\boxed{\deg R_y \leq dd'}$$

donc $\# V \leq (dd')(dd') = (dd')'$?

(3) Pour $(x,y) \in V$, ~~on veut~~ que les $x+ty$ soient 2 à 2 $\neq$.

$\forall (x',y') N$ $\quad x+ty \neq x'+ty' \quad x-x' \neq t(y'-y)$

on choisit un tel t.

$$\widetilde{P}(X,Y) := P(X-tY, Y) \qquad \widetilde{Q}(X,Y) := Q(X-tY, Y).$$

Si $(x,y) \in V$, alors $P(x,y)=0$ donc $P((x+ty)-ty, y)=0$ donc $\widetilde{P}(x+ty, y)=0$

$\widetilde{Q}(x+ty, y)=0$

$$V \hookrightarrow V(\widetilde{P}) \cap V(\widetilde{Q}) \quad V(\widetilde{R}_y) \quad \# \leq dd'$$

$$(x,y) \longmapsto (x+ty, y). \quad x+ty.$$

$\# V \leq dd'$