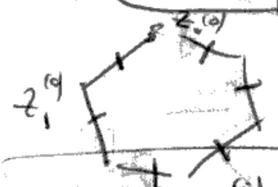
Suite de polygônes qui convergent !

$z_0^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)} \in \mathbb{C}$



← compléter le dessin

$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0 \dots n-1\}, \quad \boxed{z_j^{(i+1)} := \frac{z_j^{(i)} + z_{j+1}^{(i)}}{2}}$ avec $z_n^{(i)} := z_0^{(i)}$

$Z^{(i)} := \begin{pmatrix} z_0^{(i)} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{(i)} \end{pmatrix}$. $\quad Z^{(i+1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix} Z^{(i)} \quad (*)$

donc $\boxed{Z^{(i)} = A^i Z^{(0)}}$.

Lemme Si $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $A := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$. Alors A est diagonalisable et a ~~n valeurs propres distinctes~~, ~~qui sont les éléments de $\mathbb{U}_n$~~, et les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$, $\omega \in \mathbb{U}_n$, de valeur propre associée $P(\omega) := a_0 + a_1\omega + \dots + a_{n-1}\omega^{n-1}$.

Dém

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots \\ & \ddots & \ddots \\ a_1 & & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\omega + \dots + a_{n-1}\omega^{n-1} \\ a_{n-1} + a_0\omega + \dots + a_{n-2}\omega^{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + a_{n-1}\omega + \dots + a_0\omega^{n-1} \end{pmatrix} = P(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

fais 1 étape de plus.

Finalement, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} \right\}_{\omega \in \mathbb{U}_n}$ est une base car elle est libre à n vecteurs (déterminant de Vandermonde).

Dans notre cas, $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2 \end{pmatrix}$ les valeurs propres de A sont les $P(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\omega = \frac{1+\omega}{2}$ avec $\omega \in \mathbb{U}_n$. Ainsi, elles sont toutes de module < 1, sauf pour $\omega = 1$. Ainsi, si $A = P \begin{pmatrix} \frac{1+\omega}{2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1+\omega}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$,

$A^i \longrightarrow P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A^\infty$. Ainsi, $Z^{(i)}$ converge vers $A^\infty Z^{(0)} =: Z^{(\infty)}$.

En passant à la limite dans $(*)$ on a $Z^\infty \in E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $Z^\infty = a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$.

(convergence de P_n vers 1 point !). Pour déterminer ce point, on remarque la chose suivante.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} z_j^{(i)} = \sum_{j=0}^{n-1} z_j^{(i+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} z_j^{(0)} \quad (**)$$

donc, $Z^{\infty} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $na = \sum_{j=0}^{n-1} z_j^{(0)}$ i.e. $a = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} z_j^{(0)}$.

Et finalement, a est l'isobarycentre de $(z_j^{(0)})_j$ donc (P_n) converge vers le centre de gravité de P_0.

<u>Remarque</u> $(**)$ dit que tous les P_n ont le même centre de gravité !

– On l'obtient aussi par convergence de (P_n) (~~donc~~ montre le rôle : A ne dépend pas de P_0).

<u>Rmq</u> La convergence est très rapide, puisque $A \to P \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ aussi vite que $\left(\frac{1+\omega}{2}\right)^m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

pour $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ le plus proche de 1, i.e. $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

$\overline{\quad\quad}$ $v'32$

$$\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2} = e^{\frac{ik\pi}{n}} \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}}{2} = e^{\frac{ik\pi}{n}} \cos\frac{k\pi}{n}$$

$$\text{donc} \quad \left| \frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2} \right| = \cos\frac{k\pi}{n}$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{m} = e^{n \operatorname{Log}\cos\frac{\pi}{n}} = e^{\cancel{\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{m}}}$$

<u>Rmq</u> On n'atteint pour la même raison jamais le pt limite en tps fini, sauf $n \leq 2$.

(détailler le lemme si c'est encore trop court ! écrire ~~le~~ $q \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ ~~suppo~~ et 1 vp, ~~Suppo~~ et supposer $x_0, \dots, x_{n-1} \geq 0$, identifier avant les coefs de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$).