Série harmonique

Leçons 224, 230, 247

Salim Rostam

12 juillet 2014

Définition. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ les sommes partielles des termes de la série harmonique.*

Le but de ce développement est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Quand $n \to +\infty$, on a $H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.*

Définition. *Le réel γ est appelé la* constante d'Euler.

1 Terme en $\log n$

La fonction qui à $t > 0$ associe $\frac{1}{t}$ étant décroissante, on a :

$$\forall k \geq 1, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

donc en intégrant on obtient :

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log(k+1) - \log k \leq \frac{1}{k} \tag{1}$$

En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$H_n - 1 \overset{(*)}{\leq} \log n \overset{(**)}{\leq} H_{n-1}$$

De l'inégalité $(*)$ on obtient que $H_n \leq 1 + \log n$, et en ajoutant $\frac{1}{n}$ de chaque côté de l'inégalité $(**)$ on obtient que $\frac{1}{n} + \log n \leq H_n$. Finalement, on obtient donc :

$$\frac{1}{n} + \log n \leq H_n \leq 1 + \log n$$

ce qui montre que $H_n \sim \log n$.

Remarque. En particulier, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge.

Remarque. On aurait pu utiliser le théorème de sommation des équivalents : comme $\frac{1}{k} \sim -\log(1 - \frac{1}{k}) = \log k - \log(k-1)$ on a, comme $\frac{1}{k} > 0$ et que la somme des $\log k - \log(k-1)$ diverge, l'équivalent $H_n \sim \log n$. Néanmoins, la méthode de comparaison avec une intégrale sera réutilisée par la suite.

2 Terme constant

On va en fait faire un peu plus attention dans notre encadrement précédent. On a vu que pour $k \geq 1$ on a $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq 0$. Or, l'encadrement (1) fournissant également $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \frac{1}{k+1}$, on obtient que $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Ainsi, on a :

$$0 \leq \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

donc la série de terme général $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge (car à termes positifs majorés par le terme général d'une série convergente). Autrement dit en notant γ la somme, la suite de terme général $H_n - \log n$ converge vers γ et c'est ce que l'on voulait montrer.

Remarque. On a $\gamma \simeq 0.577$; on ne sait pas si γ est un nombre rationnel.

Remarque. En fait, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue décroit vers 0 alors pour tout $k \geq 0$ on a l'encadrement $0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k) - f(k+1)$ donc la série de terme général $f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t + c + o(1)$. En particulier, $\sum f(k)$ converge si et seulement si $\int f$ converge.

3 Terme en $\frac{1}{n}$

Notons $u_n := H_n - \log n - \gamma$; d'après ce qui précède, on sait que la suite (u_n) converge vers 0 ; on souhaite déterminer un équivalent de u_n. Pour cela, l'idée va être de calculer un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ puis d'utiliser le théorème de sommation des équivalents.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} + \log\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

donc $u_n - u_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$. La série de terme général $-\frac{1}{2n^2} < 0$ étant convergente (critère de Riemann), on en déduit par le théorème de sommation des équivalent l'équivalence des restes, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} (u_n - u_{n-1}) \sim -\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Comme (u_n) converge vers 0, le premier membre n'est rien d'autre que $-u_N$; il ne manque donc plus que le résultat du lemme suivant pour conclure.

Lemme. *Soit $\alpha > 1$. On a l'équivalent suivant :*

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut faire le même raisonnement que dans la section 1 pour obtenir :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{(-\alpha+1)}\right]_n^{n+1} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

d'où l'encadrement [1] :

$$-\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{N^\alpha} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq -\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

et donc l'équivalent annoncé (car $\frac{1}{N^\alpha}$ est négligeable devant $\frac{1}{N^{\alpha-1}}$). □

Ainsi, on obtient $u_N \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(2-1)N^{2-1}} = \frac{1}{2N}$ et donc finalement $u_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4 Terme en $\frac{1}{n^2}$

On fait la même chose que précédemment mais cette fois avec $v_n := H_n - \log n - \gamma - \frac{1}{2n}$, qui tend également vers 0 (car négligeable devant $\frac{1}{n}$ par ce qui précède).

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n-1} &= \frac{1}{n} + \log\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} \\
&= \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\qquad - \frac{1}{2n}\left(1 - \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) \\
&= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
v_n - v_{n-1} &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant encore une fois le théorème de sommation des équivalent et le lemme on obtient que $-v_N \sim \frac{1}{6}\frac{1}{2N^2}$ et donc finalement $H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. Comme dans la section 1 : dans un premier temps on somme le premier membre pour n allant de N à $+\infty$ et dans un deuxième temps on somme le deuxième pour n allant de N à $+\infty$ puis on retranche $\frac{1}{N^\alpha}$ de chaque côté ; on s'embête ainsi pour avoir directement de N et non des $N+1$ dans les équivalents.