(Nombres normaux) 8-7 p550. (Th. limites en Probabilité. Applications à l'Analyse.)

Pour $r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $x \in [0,1[$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i^r(x)}{r^i}$ avec $\varepsilon_i^r \in \{0,\dots,r-1\} =: A_r$

Pour $k \geq 1$, $b \in A^k$ ($b = (b_1,\dots,b_k)$), $C(n,b)(x) := \#\{i \in \{1,\dots,n-k+1\} / \varepsilon_i^r(x) = b_1,\dots,\varepsilon_{i+k-1}^r(x) = b_k\}$.

Soit $r \geq 2$.

<u>Lemme</u> Les ε_i^r pour $i \in \mathbb{N}^*$ sont iid de loi $\mathcal{U}_{A_r}$.

- Soit $b_1 \in A_r$.

$X_i^r := \mathbb{1}_{\varepsilon_i^r = b_1} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{r}\right)$ (X_i) iid.

$$\frac{C(n,b)}{n} = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} / \varepsilon_i^r = b_1\}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^r}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{r} \quad ps \quad \text{LGN})$$

- Soit $b = (b_1,b_2) \in A_r^2$.

$$X_{i,2}^r := \mathbb{1}_{\varepsilon_i^r = b_1, \varepsilon_{i+1}^r = b_2} = \mathbb{1}_{\varepsilon_i^r = b_1} \mathbb{1}_{\varepsilon_{i+1}^r = b_2}$$

$$\frac{C(2n,b)}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i,2}^r + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} X_{2i-1,2}^r \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}.$$

De même avec $\frac{C(2n+1,b)}{2n+1}$ d'où $\frac{C(n,b)}{n} \xrightarrow[]{n\to\infty} \frac{1}{r^2}$ ps

- Pour $b \in A_r^k$, on montre que $\frac{C(kn+i,b)}{kn} \longrightarrow \frac{1}{r^k}$ ~~$\forall b \in$~~ $\forall i \in \{0,\dots,k-1\}$.

d'où $\boxed{\frac{C(n,b)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} \frac{1}{r^k}}$.

- Par intersection d'ensembles de mesure pleine, $\forall k \geq 1$, $\left[p.s, \frac{C(n,b)}{n} \xrightarrow[]{n\to\infty} \frac{1}{r^k} \ \forall b \in A_r^k\right)$.

- ________________, ~~...~~ ps, x est normal en base r

- ________________, $\boxed{\text{ps, } x \text{ est normal}}$.

8'20.

Démonstration du lemme

Soit $r \geq 2$, $\mathcal{E}_i := \mathcal{E}_i^r$.

$\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1 = b_1, \dots, \mathcal{E}_k = b_k\} = \{x \in [b, b + \frac{1}{r^k}[\}$ avec $b = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{r^i}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathcal{E}_1 = b_1, \dots, \mathcal{E}_k = b_k) = \frac{1}{r^k}.}$$

- Ainsi, $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1 = b_1) = \frac{1}{r}$ donc $\boxed{\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{U}_{A_r}}$.
- $\mathbb{P}(\mathcal{E}_k = b_k) = \sum_{b_1, \dots, b_{k-1} = 0}^{r-1} \mathbb{P}(\mathcal{E}_1 = b_1, \dots, \mathcal{E}_k = b_k) = \sum_{b_1 \dots b_{k-1} \in A_r} \frac{1}{r^k} = \frac{r^{k-1}}{r^k} = \frac{1}{r}$,

  donc $\boxed{\mathcal{E}_k \sim \mathcal{U}_{A_r}}$ $\forall k \geq 2$.
- $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{n_1} = b_{n_1}, \dots, \mathcal{E}_{n_k} = b_{n_k}) = \sum_{\substack{b_i \in A_r \\ i \notin \{n_1, \dots, n_k\}}} \mathbb{P}(\mathcal{E}_1 = b_1, \dots, \mathcal{E}_{n_k} = b_{n_k}) = \sum_{\substack{b_i \in A_r \\ i \notin \{n_1, \dots, n_k\}}} \frac{1}{r^{n_k}} = \frac{r^{n_k - k}}{r^{n_k}} = \frac{1}{r^k}$.

Donc $(\mathcal{E}_k)_{k \geq 1}$ est $\perp\!\!\!\perp$.

12'56