Théorème des extrema liés

Lecons 159, 215, 217, 219
Salim Rostam

14 juillet 2014

1 Théorème des extrema liés

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit f une application différentiable de $U \to \mathbb{R}$ et soient $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On suppose que $a \in U$ est tel que $f(a)$ est un extremum de f sur l'ensemble $V := \{x \in U : \forall\, 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0\}$, et on suppose de plus que la famille $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

Théorème (extrema liés)**.** *Sous ces hypothèses, il existe (des uniques)* $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ *tels que* $\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a)$.

Remarque. L'unicité découle du fait que la famille $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leq i \leq p}$ est libre.

Remarque. On parle d'extrema *libres* quand $V = U$ tout entier ; on sait que dans ce cas on a $\mathrm{D}f(a) = 0$. Remarquons que le théorème précédent reste vrai : il suffit de prendre $\lambda_i = 0\ \forall i$.

1.1 La partie V est lisse en a

Par définition, on a $V = \{g_i = 0\}_{1 \leq i \leq p}$; comme par hypothèse les g_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que la famille $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leq i \leq p}$ est libre, par le théorème des sous-variétés on en déduit que V est lisse en a (de dimension $n - p$).

1.2 Réécriture des hypothèses

Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1(]-1, 1[, V)$ un chemin tracé sur V tel que $\gamma(0) = a$. Par hypothèse sur a, comme γ est à valeurs dans V, l'application $f \circ \gamma$ possède un extremum en 0. Comme cette dernière application est différentiable, on a $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ donc par la formule de dérivation d'une composée on en déduit que $\mathrm{D}f(\gamma(0)).\gamma'(0)$ *i.e.*

$$\mathrm{D}f(a).\gamma'(0) = 0$$

Par définition du plan tangent à V en a on a donc $\ker \mathrm{D}f(a) \supseteq \mathrm{T}_a V$.

1.3 Un peu de dualité

Comme $V = \{g_i = 0\}_{1 \leq i \leq p}$ et que la famille $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leq i \leq p}$ est libre, on en déduit que $\mathrm{T}_a V = \cap_{i=1}^p \ker \mathrm{D}g_i(a)$. Ainsi, par ce qui précède on a :

$$\ker \mathrm{D}f(a) \supseteq \bigcap_{i=1}^{p} \ker \mathrm{D}g_i(a)$$

En passant à l'orthogonal, on obtient :

$$(\ker \mathrm{D}f(a))^{\perp} \subseteq \sum_{i=1}^{p} (\ker \mathrm{D}g_i(a))^{\perp} \tag{1}$$

Or, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a par définition $E^{\perp} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \forall x \in E, u(x) = 0\}$; ainsi, si $u \in (\mathbb{R}^n)^*$ alors $u \in (\ker u)^{\perp}$ et par égalité des dimensions on a $(\ker u)^{\perp} = \mathrm{vect}(u)$.

Ainsi, de l'équation (1) on en déduit que $\mathrm{D}f(a) \in \mathrm{vect}(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leq i \leq p}$ et c'est exactement ce que l'on voulait montrer !

Remarque. Pour ceux qui ne sont pas chauds pour utiliser l'orthogonalité, voici une autre rédaction : comme $(\mathrm{D}g_i(a))_{1 \leq i \leq p}$ est une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$, on peut la compléter en une base ; on note e_i^* les autres vecteurs de la base que l'on obtient. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base antéduale ; on a $\mathrm{D}f(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{D}g_i(a) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i^*$ donc en évaluant en un e_j pour $j > p$ on obtient $\mathrm{D}f(a).e_j = \lambda_j$. Or, par hypothèse $\ker \mathrm{D}f(a) \supseteq \cap_{i=1}^{p} \ker \mathrm{D}g_i(a) \ni e_j$ donc on obtient $\lambda_j = 0$; c'est gagné !

2 Application à la réduction des endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

On va montrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors u est diagonalisable en base orthonormée, et on a les égalités suivantes :*

$$\min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \min \mathrm{Sp}(u)$$

$$\max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \max \mathrm{Sp}(u)$$

2.1 Existence d'une valeur propre (réelle)

La fonction $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ étant continue sur le compact $\{\| \cdot \| = 1\}$, on en déduit que f est bornée et atteint ses bornes sur ce compact, ce qui justifie les min et max précédents ; soit a qui réalise le maximum.

Posons $g : x \mapsto \|x\|^2$; l'application g est différentiable et $\mathrm{D}g(x).h = 2\langle x, h \rangle$ donc $\nabla g(x) = 2x$. Ainsi, si $x \neq 0$ (en particulier si $\|x\| = 1$ ce qui est le cas dans notre problème) alors $(\mathrm{D}g(x))$ est une famille libre. On peut donc appliquer le théorème des extrema liés !

On a $\mathrm{D}f(x).h = \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle$ donc comme u est autoadjoint on a $\nabla f(x) = 2u(x)$. Ainsi, par le théorème des extrema liés on a l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u(a) = \lambda a$$

autrement dit, comme a est non nul (car de norme 1 !), le réel λ est valeur propre de u. Remarquons que $\langle u(a), a\rangle = \lambda\langle a, a\rangle = \lambda$ donc on a $\lambda = \max_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$.

2.2 Récurrence

On vient de voir que u possède une valeur propre λ ; en raisonnant par récurrence, on conclut que u est orthodiagonalisable, l'argument étant que l'endomorphisme induit par u sur $\ker(u - \lambda)^\perp$ reste autoadjoint (ce sous-espace est stable par $u^* = u$ donc on a bien le droit de considérer l'endomorphisme induit). En particulier, le spectre de u est réel.

2.3 Bornes du spectre

D'après ce qui a été fait dans la section 2.1, on sait déjà que l'on a $\max_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle = \lambda \leq \max \mathrm{Sp}(u)$. Or, si $\mu \in \mathrm{Sp}(u)$ alors si x est un vecteur propre unitaire associé on a $\langle u(x), x\rangle = \mu$, donc on en déduit que $\mu \leq \lambda$. Cela étant valable $\forall \mu \in \mathrm{Sp}(u)$, on en déduit que $\max \mathrm{Sp}(u) \leq \lambda = \max_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$. Comme on avait déjà l'inégalité dans l'autre sens, on obtient bien le résultat annoncé (le résultat pour le minimum étant bien sûr très différent) !

Remarque. À partir du théorème d'orthodiagonalisation, on obtient en fait directement ces égalités en décomposant x sur une base orthonormale (e_i) de vecteurs propres ; on a alors $\langle u(x), x\rangle = \sum \lambda_i x_i^2 \leq (\max \lambda_i) \sum x_i^2 = \max \lambda_i$ et on a l'égalité pour x un vecteur propre bien choisi.