Réduction des opérateur compacts symétriques

Leçons 203, 205, 208, 213
Salim Rostam

22 mai 2014

Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (de dimension infinie) et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact symétrique non nul.

Théorème. *Il existe une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ formée exclusivement de vecteurs propres de T, l'ensemble de ces vecteurs associés à une valeur propre non nulle de T étant au plus dénombrable. De plus, si (e_n) désigne cette dernière famille et (λ_n) les valeurs propres correspondantes alors on peut réordonner cette famille de sorte que $(|\lambda_n|)$ décroisse vers 0. En outre, $\forall x \in \mathcal{H}$ on a $Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$.*

En s'inspirant de la démonstration par récurrence en dimension finie, on va tout d'abord prouver que T possède un vecteur propre.

1 L'opérateur T^2 admet $\|T\|^2$ comme valeur propre

Soit $x \in \mathcal{H}$ non nul ; le vecteur x est un vecteur propre de T^2 associé à la valeur propre $\|T\|^2$ si et seulement si $\left\|T^2 x - \|T\|^2 x\right\|^2 = 0$. De plus :

$$\begin{aligned}
\left\|T^2 x - \|T\|^2 x\right\|^2 &= \left\|T^2 x\right\|^2 + \|T\|^4 \|x\|^2 - 2\|T\|^2 \operatorname{Re} \langle T^2 x, x \rangle \\
&= \left\|T^2 x\right\|^2 + \|T\|^4 \|x\|^2 - 2\|T\|^2 \operatorname{Re} \|Tx\|^2 \text{ car } T \text{ est symétrique} \\
&\leq 2\|T\|^2 \left(\|T\|^2 \|x\|^2 - \|Tx\|^2 \right)
\end{aligned}$$

On sait que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$: ainsi, on peut trouver une suite (x_n) de vecteurs de $\mathcal{H}$ de norme 1 telle que $\|Tx_n\| \to \|T\|$. D'après l'inégalité précédente, on obtient donc :

$$\left\|T^2 x_n - \|T\|^2 x_n\right\|^2 \to 0 \tag{1}$$

Or, l'opérateur T est compact et (x_n) est bornée donc quitte à extraire on peut supposer que (Tx_n) converge, vers un vecteur y. Ainsi, comme T est continu (car borné sur la boule unité car compact), $T^2 x_n \to Ty$ et (1) fournit donc $\|T\|^2 x_n \to Ty$. Comme T est non nul, on peut en conclure que (x_n) converge vers $x := \frac{Ty}{\|T\|^2}$, qui est non nul puisque de norme 1 (car $\|x_n\| = 1$). Encore par (1) on obtient alors $T^2 x = \|T\|^2 x$; comme $x \neq 0$ on en déduit que x est vecteur propre de T^2 associé à la valeur propre $\|T\|^2$.

2 L'opérateur T admet $\|T\|$ ou $-\|T\|$ comme valeur propre

On vient de voir que l'on peut trouver $x \in \mathcal{H}$ non nul tel que $(T^2 - \|T\|^2)x = 0$; posons $y := (T - \|T\|)x$. Deux cas se présentent :

- si $y = 0$ alors on a $(T - \|T\|)x = 0$ *i.e.* x est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\|T\|$ (car x est non nul) ;
- sinon, $y \neq 0$ donc comme $T^2 - \|T\|^2 = (T + \|T\|)(T - \|T\|)$ on a $(T + \|T\|)y = 0$ *i.e.* y est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $-\|T\|$.

Finalement, on a montré que T admet $\|T\|$ ou $-\|T\|$ comme valeur propre.

3 Récurrence

Initialisation. Posons $T_1 := T \neq 0$; d'après la section précédente, on peut trouver $\lambda_1 \in \{-\|T_1\|, \|T_1\|\}$ valeur propre de T_1. Ainsi, comme T est compact $\ker(T - \lambda_1)$ est de dimension finie et donc est fermé, d'où :

$$\mathcal{H} = \ker(T - \lambda_1) \overset{\perp}{\oplus} \ker(T - \lambda_1)^{\perp}$$

avec $T|_{\ker(T-\lambda_1)} = \lambda_1 \mathrm{id}$. Il suffit donc d'étudier l'opérateur T sur $\ker(T - \lambda_1)^{\perp}$. Ainsi, on considère l'opérateur $T_2 := T|_{\ker(T-\lambda_1)^{\perp}}$.

Si T_2 est nul on arrête le processus, et sinon T_2 est non nul donc on peut appliquer le résultat de la section précédente à l'opérateur T_2 : il existe donc $\lambda_2 \in \{-\|T_2\|, \|T_2\|\}$ valeur propre de T_2. Bien sûr, comme T_2 part de l'espace $\ker(T - \lambda_1)^{\perp}$ on a $\lambda_2 \neq \lambda_1$. De plus, comme T_2 est la restriction de T_1 à un sous-espace, on a $\|T_2\| \leq \|T_1\|$ autrement dit $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Finalement, comme auparavant on a la décomposition :

$$\mathcal{H} = \ker(T - \lambda_1) \oplus \ker(T - \lambda_2) \overset{\perp}{\oplus} [\ker(T - \lambda_1) \oplus \ker(T - \lambda_2)]^{\perp}$$

Récurrence. Pour $k \geq 2$, on suppose avoir construit une famille $(\lambda_n)_{1 \leq n \leq k}$ de valeurs propres non nulles de T deux à deux distinctes et décroissante en module ; on note $T_{k+1} := T|_{\left[\oplus_{i=1}^{k} \ker(T-\lambda_i)\right]^{\perp}}$. Si $T_{k+1} = 0$ on s'arrête, sinon $T_{k+1} \neq 0$ et on peut appliquer le résultat de la section précédente à l'opérateur T_{k+1}. On trouve ainsi une valeur propre non nulle $\lambda_{k+1} \in \{-\|T_{k+1}\|, \|T_{k+1}\|\}$ de T ; comme $\left[\oplus_{i=1}^{k} \ker(T - \lambda_i)\right]^{\perp} \subseteq \left[\oplus_{i=1}^{k-1} \ker(T - \lambda_i)\right]^{\perp}$, l'opérateur T_{k+1} est la restriction à un sous-espace de T_k, en particulier $\|T_{k+1}\| \leq \|T_k\|$ *i.e.* $|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k|$. Finalement, comme l'ensemble de départ de T_{k+1} est $\left[\oplus_{i=1}^{k} \ker(T - \lambda_i)\right]^{\perp}$ on a $\lambda_{k+1} \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ et l'hérédité est démontrée.

4 Conclusion

4.1 Cas où la récurrence ne s'arrête pas

On dispose alors d'une suite infinie de valeurs propres non nulles deux à deux distinctes $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissante en module.

La suite (λ_n) tend vers 0. Comme la suite $(|\lambda_n|)$ est décroissante, étant minorée (par 0) elle converge, vers $\lambda \geq 0$. Si $\lambda \neq 0$, considérons pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ un vecteur propre unitaire e_n associé à la valeur propre λ_n. Comme $|\lambda_n| \geq \lambda > 0$, la suite $(\frac{1}{\lambda_n} e_n)$ est bornée donc comme T est compact on peut, quitte à extraire, supposer que la suite $\left(T(\frac{1}{\lambda_n} e_n)\right)$ converge. Or :

$$T\left(\frac{1}{\lambda_n} e_n\right) = \frac{1}{\lambda_n} T e_n = e_n$$

donc cette suite ne peut converger car $\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2$ (les λ_i étant deux à deux distinctes, les vecteurs e_i sont deux à deux orthogonaux car T est symétrique). Ainsi, $\lambda = 0$ donc $(|\lambda_n|)$ tend vers 0 donc (λ_n) tend vers 0.

Inclusion $F^\perp \subseteq \ker T$. Posons $F := \oplus_{n \geq 1} \ker(T - \lambda_n)$. Si un vecteur x est dans $F^\perp$, d'après la définition de F on peut appliquer l'opérateur T_n à x pour tout $n \geq 1$. Ainsi :

$$\forall n \geq 1, \|Tx\| = \|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| = |\lambda_n| \|x\| \to 0$$

par ce qui précède. Ainsi, $Tx = 0$ *i.e.* $x \in \ker T$.

4.2 Diagonalisation de T

Tout d'abord, remarquons que le résultat précédent reste valable dans le cas où la récurrence s'arrête (et où la somme porte alors sur un nombre fini de valeurs de n) ; en particulier on a $\overline{F} = F^{\perp\perp} \supseteq (\ker T)^\perp$. Par conséquent, comme $\ker T$ est fermé (car T est continu car compact), on a $(\ker T)^\perp \oplus \ker T = \mathcal{H}$ donc $\overline{F} + \ker T = \mathcal{H}$. Comme tous les éléments de $\ker T$ sont orthogonaux à tous les éléments de F (car T symétrique et $\lambda_n \neq 0\ \forall n$), on en déduit que $\ker T$ et $\overline{F}$ sont orthogonaux et on a donc $\mathcal{H} = \overline{F} \oplus^\perp \ker T$ c'est-à-dire :

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{n \geq 1} \ker(T - \lambda_n)} \oplus \ker T$$

(les sommes étant orthogonales). Finalement, si $(e_n^m)_m$ désigne une base de $\ker(T - \lambda_n)$ (qui est de dimension finie car $\lambda_n \neq 0$ et T compact), la famille $(e_n^m)_{n,m}$ est une base hilbertienne de $\overline{F}$ (en effet $\overline{F} = \overline{\mathrm{vect}(e_n^m)}$!). Comme $\ker T$ possède une base hilbertienne, en concaténant les bases obtenues on obtient donc une base hilbertienne de vecteurs propres de T, *i.e.* on l'a diagonalisé. En outre on a :

$$\forall x \in \mathcal{H}, Tx = \sum_{n,m} \lambda_n \langle x, e_n^m \rangle e_n^m$$

Remarque. Bien sûr, quand T est de rang fini (c'est-à-dire que la récurrence s'arrête), la famille $(e_n^m)_{n,m}$ est une base *algébrique* de F qui est alors de dimension finie.

Références

[1] WILLEM Michel, *Analyse fonctionnelle élémentaire.* Cassini, 2003.